

Θέματα σε όλη την ύλη για την Γ' Γυμνασίου στα Μαθηματικά

ΘΕΩΡΙΑ

**1<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ**

- i. Τι λέγεται ταυτότητα; Να γράψετε τα αναπτύγματα: (α)της διαφοράς τετραγώνων, (β) του κύβου αθροίσματος και να τις αποδείξετε.  
(μονάδες 1,5)
- ii. Τι ονομάζεται σύνολο; Πότε δύο σύνολα είναι ίσα; Πότε ένα σύνολο A ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου B; Τι ονομάζεται κενό σύνολο;  
(μονάδες 1,5)
- iii. Τι ονομάζεται διχοτόμος γωνίας και ποια είναι η χαρακτηριστική της ιδιότητα; (να διατυπωθεί κι η αντίστροφη πρόταση, να γίνει σχήμα, όχι απόδειξη)  
(μονάδες 1,5)
- iv. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.  
(μονάδες 1,5)
- v. Να διατυπώσετε το Νόμο Ημιτόνων και το Νόμο συνημιτόνων σε ένα τυχαίο τρίγωνο ABΓ. (χωρίς απόδειξη)  
(μονάδα 1)

## 2<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- i. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.  
(μονάδα 1)
- ii. Τι είναι η διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;  
(μονάδες 1,5)
- iii. Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών.  
(μονάδα 1)
- iv. Τι πρόσημο έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας αμβλείας γωνίας; Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $180^\circ$  και να τους αιτιολογήσετε με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων.  
(μονάδες 2)
- v. Τι ονομάζεται ένωση δύο συνόλων A και B; Τι ονομάζεται τομή δύο συνόλων A και B; Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός συνόλου A ως προς ένα βασικό σύνολο  $\Omega$ ;  
(μονάδες 1,5)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

A. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:

i.  $p(x) = x^2 - 3x + 2$

ii.  $q(x) = 3x^2 - 3x - 6$

(μονάδες 2)

Και στη συνέχεια, να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{x+1}{p(x)} = \frac{11x+3}{q(x)} - \frac{3}{2x+2}$$

(μονάδες 2)

B. Να διερευνηθεί η παρακάτω εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ :

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \cdot x = \lambda^2 - 9, \lambda \in \mathbb{R}$$

(μονάδα 1)

C. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-2x}{3} - \frac{y+2}{4} = -4 \\ \frac{y-x}{3} + \frac{x+3}{2} = 3 \end{array} \right.$$

(μονάδες 1,5)

## 2<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**A.**

Αν είναι  $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega$ .

(μονάδες 3)

**B.**

i. Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = \frac{1}{1 - \varepsilon\varphi\omega}$$

ii. Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για να ορίζεται η παραπάνω ισότητα;  
(μονάδες 2)

**C.**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση για τις πλευρές του:  
 $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma$ . Να βρεθεί η γωνία του Α.

(μονάδες 1,5)

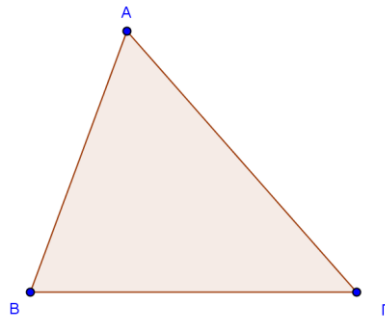
### 3<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα ΜΔ ίσο με το μήκος της ΑΜ.

- i. Να δείξετε ότι  $AB = ΓΔ$ . (μονάδες 2)
- ii. Να αιτιολογήσετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλα. (μονάδα 1)

Στη συνέχεια, από το σημείο Μ να φέρετε μία ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ που να τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ.

- iii. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:  $\frac{AM}{AK} = \frac{AΔ}{AΓ}$  (μονάδα 1)
- iv. Να συγκρίνετε ως προς την ομοιότητά τους τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΑΔΓ. (μονάδα 1)
- v. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΚ είναι  $18\text{cm}^2$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραapeζίου ΜΚΓΔ. (μονάδες 1,5)



Θέματα σε όλη την ύλη για την Γ' Γυμνασίου στα Μαθηματικά

Ενδεικτικές λύσεις στα θέματα των ασκήσεων...

### 1<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

A. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα: (μονάδες 2)

i.  $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

ii.  $q(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3 \cdot (x^2 - x - 2) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$

Και στη συνέχεια, να λυθεί η εξίσωση: (μονάδες 2)

$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{x+1}{p(x)} = \frac{11x+3}{q(x)} - \frac{3}{2x+2}$$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{11x+3}{3(x-2)(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\text{ΕΚΠ} = 6(x-1)(x+1)(x-2)$$

$$x \neq -1, +1, +2$$

$$6(x+2)(x-2) + 6(x+1)(x-1) = 2(11x+3)(x-1) - 9(x-1)(x-2)$$

$$6(x^2-4) + 6(x^2+2x+1) = (22x+6)(x-1) - (9x-9)(x-2)$$

$$6x^2 - 24 + 6x^2 + 12x + 6 = 22x^2 - 22x + 6x - 6 - (9x^2 - 18x - 9x + 18)$$

$$12x^2 + 12x - 18 = 22x^2 - 16x - 6 - 9x^2 + 18x + 9x - 18$$

$$12x^2 + 12x - 18 = 13x^2 + 11x - 24$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \text{ ή}$$

$$x = -2 \text{ δεκτές}$$

B. Να βρεθεί ο άγνωστος  $x$  στην παρακάτω εξίσωση διερευνώντας τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ : (μονάδα 1)

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \cdot x = \lambda^2 - 9, \lambda \in \square$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3)x = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

$$\lambda \neq -1, +3$$

$$x = \frac{(\lambda + 3)}{(\lambda + 1)}$$

$$\lambda = -1$$

$$0x = -8 \text{ αδύνατη}$$

$$\lambda = 3$$

$$0x = 0 \text{ αόριστη}$$

C. Να λυθεί το σύστημα των δύο εξισώσεων: (μονάδες 1,5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-2x}{3} - \frac{y+2}{4} = -4 \\ \frac{y-x}{3} + \frac{x+3}{2} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4(1-2x) - 3(y+2) = -48 \\ 2(y-x) + 3(x+3) = 18 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 - 8x - 3y - 6 = -48 \\ 2y - 2x + 3x + 9 = 18 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8x - 3y = -46 \\ x + 2y = 9 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (5, 2)$$

## 2<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

A. Αν είναι  $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega$ . (μονάδες 3)

$$\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\frac{4}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\left(-\frac{4}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$+\frac{16}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\frac{25}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$$

και

$$\eta\mu\omega = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\eta\mu\omega = +\frac{4}{5}$$

B. Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα: (μονάδες 2)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = \frac{1}{1 - \varepsilon\varphi\omega}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 - \varepsilon\varphi\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$$

Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για να ορίζεται η παραπάνω ισότητα;

$$\sigma\upsilon\nu\omega \neq \eta\mu\omega$$

και

$$\varepsilon\varphi\omega \neq 1$$

C. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση για τις πλευρές του:  
 $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma$ . Να βρεθεί η γωνία του Α. (μονάδες 1,5)



N.H.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta \cdot \gamma = -2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$1 = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\sigma\upsilon\nu A = -\frac{1}{2}$$

$$A = 120^\circ$$

### 3<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

i. Τα τρίγωνα ABM και MΓΔ είναι ίσα, διότι:

$$AM = M\Delta \text{ από υπόθεση}$$

$$BM = M\Gamma \text{ από διάμεσο AM}$$

$$\hat{A}M\hat{B} = \hat{\Gamma}M\hat{\Delta} \text{ ως κατακορυφήν γωνίες}$$

1<sup>ο</sup> Κ.Ι.Τ. , άρα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα:

$$AB = \Gamma\Delta, \hat{B}\hat{A}M = \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}, \hat{A}\hat{B}M = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$$

ii.  $AB \parallel \Gamma\Delta$ , διότι σχηματίζονται δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ( $\hat{B}\hat{A}M = \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ )

iii.  $AB \parallel MK \parallel \Delta\Gamma$ , από ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Θαλή:

$$\frac{AM}{AK} = \frac{M\Delta}{K\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

iv. Τα τρίγωνα AMK και AΔΓ είναι όμοια, διότι:

$$\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{A}\hat{K} \text{ κοινή γωνία}$$

$$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{M}\hat{K} \text{ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά των } MK \parallel \Delta\Gamma \text{ τέμνουσα } A\Delta$$

$$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{K}\hat{M}$$

$$AMK \approx A\Delta\Gamma$$

$$\text{Άρα, } \frac{AM}{A\Delta} = \frac{AK}{A\Gamma} = \frac{MK}{\Delta\Gamma} = \lambda$$

$$\frac{AM}{2 \cdot AM} = \frac{1}{2} = \lambda$$

Άρα,

$$\frac{(AMK)}{(A\Delta\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(A\Delta\Gamma) = 4(AMK)$$

$$(A\Delta\Gamma) = 4 \cdot 18\text{cm}^2$$

$$(A\Delta\Gamma) = 72\text{cm}^2$$

Άρα,

$$(MK\Gamma\Delta) = 72 - 18 = 54\text{cm}^2$$

ή

τα  $\frac{3}{4}$  των  $72\text{cm}^2$

