

Θέματα σε όλη την ύλη για τη Β΄ Γυμνασίου στα Μαθηματικά

ΘΕΩΡΙΑ

1^ο ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- i. Τι ονομάζεται αριθμητική και τι αλγεβρική παράσταση; (μονάδα 1)
- ii. Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα; Με ποια αλγεβρική σχέση συνδέονται αυτά; Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο αναλόγων ποσών. Ποια είναι η γραφική παράσταση των αντίστοιχων τιμών τους (x,y) ; (μονάδες 2)
- iii. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. (Ευθύ, λόγια, σχήμα, τύπος) (μονάδα 1)
- iv. Ποια πολύγωνα ονομάζονται κανονικά; Με τι ισούται η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού πολυγώνου και ποια είναι η σχέση της με τη γωνία φ του πολυγώνου; (μονάδες 1,5)
- v. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο; Να σχεδιάσετε έναν κύβο, να ονομάσετε τις κορυφές του και αξιοποιώντας το σχήμα να δώσετε ένα παράδειγμα για κάθε μία από τις κατηγορίες των ευθειών που γράψατε παραπάνω. (μονάδες 1,5)

2^ο ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- i. Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. (λόγια, σχήμα, τύπος)
(μονάδα 1)
- ii. Πότε δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Με ποια αλγεβρική σχέση συνδέονται αυτά; Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Ποια είναι η γραφική παράσταση των αντίστοιχων τιμών τους (x,y) ;
(μονάδες 2)
- iii. Με ποια διαγράμματα παρουσιάζουμε τα στατιστικά δεδομένα; (ονομαστικά)
Με ποιους τρόπους συλλέγουμε τα στατιστικά δεδομένα; (πείτε λίγα στοιχεία γι' αυτούς τους τρόπους)
(μονάδα 1)
- iv. Να γράψετε τους τύπους των εμβαδών παράπλευρης επιφάνειας και όγκου ενός κυλίνδρου. Να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα ενός τριγωνικού πρίσματος με βάση ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο.
(μονάδες 1,5)
- v. Ποια γωνία ονομάζεται επίκεντρη και ποια γωνία ονομάζεται εγγεγραμμένη;
Ποια είναι η σχέση της κάθε μιας με το τόξο στο οποίο βαίνει; Ποια είναι η σχέση μεταξύ τους όταν βρίσκονται στον ίδιο κύκλο και βαίνουν στο ίδιο τόξο;
(μονάδες 1,5)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1^Ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

(α) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x - \frac{(x+1)}{2}}{5} - 2 \cdot \left[x - \frac{(x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

(μονάδες 3)

(β) Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

$$AB = 3 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}, \quad A\Gamma = 6 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} \quad \text{και} \quad B\Gamma = \frac{\sqrt{2 \cdot 0,25}}{3}.$$

(μονάδες 2)

(δ) Ρωτήσαμε 36 μαθητές πόσες ημέρες της εβδομάδας γυμνάζονται και οι απαντήσεις φαίνονται στον πίνακα:

1	0	2	4	0	0	2	0	2	0	1	1	2	3	0	4	4	1
0	2	3	3	3	1	1	4	1	1	2	2	3	2	1	1	0	3

- i. Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων. (μονάδα 0,5)
- ii. Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ένα κυκλικό διάγραμμα. (μονάδα 1)

2^Ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά 12cm. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και σημειώνουμε με Μ το σημείο από όπου διέρχονται όλα τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ.

- i. Να βρεθεί το μήκος του ύψους ΑΔ και το εμβαδόν του ΑΒΓ.
(μονάδες 2)
- ii. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΓ και το μήκος της πλευράς του ΓΜ.
(μονάδες 1,5)
- iii. Να γραφεί ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ.
(μονάδα 0,5)

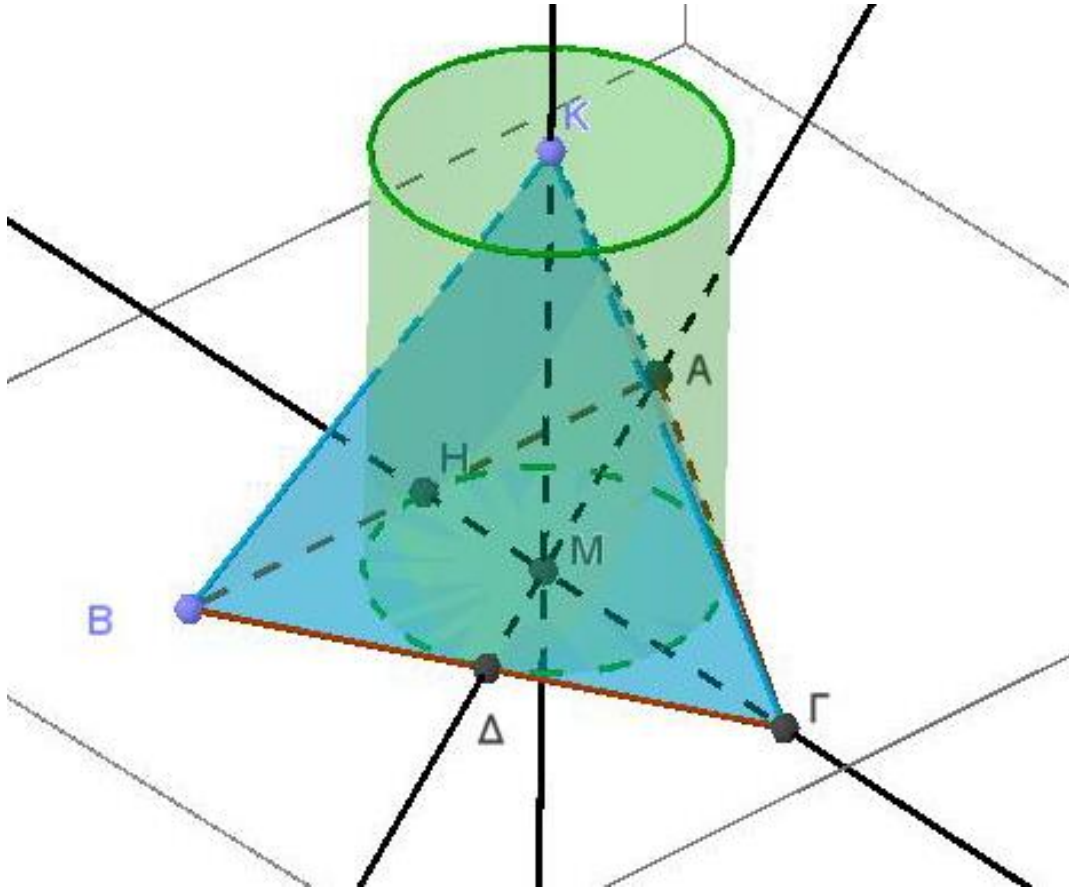
Το σχήμα που φτιάξατε αποτελεί την κάτοψη ενός τετραέδρου (κανονική τριγωνική πυραμίδα) με όλες τις ακμές του ίσες με 12cm, το οποίο συνυπάρχει με έναν κύλινδρο που έχει βάση τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ (όπως φαίνεται στο σχήμα) και έχει ύψος ίσο με το ύψος της τριγωνικής πυραμίδας που προαναφέραμε .

- iv. Να δείξετε ότι το ύψος του τετραέδρου (ΚΜ) έχει μήκος $v = 4 \cdot \sqrt{6}$ cm.

(μονάδα 1)

v. Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου και ο όγκος του κυλίνδρου.

(μονάδες 1,5)



3^ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $K(2,3)$. (μονάδα 0,5)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 , που έχει κλίση τον αριθμό $-\frac{2}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $A(5, 1)$. (μονάδα 1)
- iii. Να εξετάσετε αλγεβρικά αν η ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $K(2, 3)$. (μονάδα 1)
- iv. Με τη βοήθεια των παραπάνω σημείων (που γνωρίζετε τις συντεταγμένες τους), να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με σημείο $O(0, 0)$, η αρχή των αξόνων. (μονάδα 0,5)
- v. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N που η (ϵ_2) τέμνει τον άξονα yy' και τις συντεταγμένες του σημείου M που η (ϵ_2) τέμνει τον άξονα x' . (μονάδα 1)
- vi. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου KOM . (μονάδα 1)
- vii. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο KOM είναι ορθογώνιο. (μονάδες 1,5)

Θέματα σε όλη την ύλη για τη Β' Γυμνασίου στα Μαθηματικά

Ενδεικτικές λύσεις στα θέματα των ασκήσεων

1^ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (α) Να λυθεί η εξίσωση (μονάδες 3)

$$\frac{x - \frac{(x+1)}{2}}{5} - 2 \cdot \left[x - \frac{(x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x - (x+1)}{5} - 2 \cdot \left[\frac{4x - (x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x - x - 1}{5} - 2 \cdot \left(\frac{4x - x + 1}{4} \right) = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{5} - 2 \cdot \left(\frac{3x+1}{4} \right) = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{10} - \frac{2(3x+1)}{4} = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$2(x-1) - 5 \cdot 2(3x+1) = 4(x+2) - 10$$

$$2x - 2 - 10(3x+1) = 4x + 8 - 10$$

$$2x - 2 - 30x - 10 = 4x - 2$$

$$-28x - 12 = 4x - 2$$

$$-28x - 4x = +12 - 2$$

$$-32x = +10$$

$$x = -\frac{10}{32}$$

$$x = -\frac{5}{16}$$

(β) Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

$$AB = 3 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 9 \quad A\Gamma = 6 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 12 \quad \text{και}$$

$$B\Gamma = \frac{\sqrt{2 \cdot 025}}{3} = 15.$$

Εφαρμόζουμε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$BG^2 = AG^2 + AB^2$$

$$15^2 = 12^2 + 9^2$$

$$225 = 144 + 81$$

$$225 = 225$$

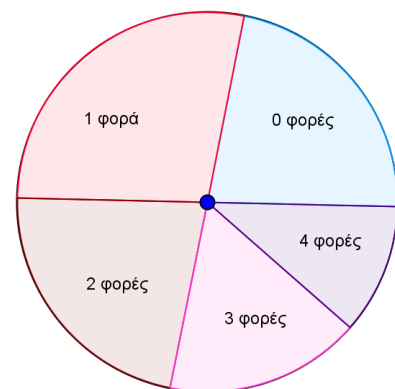
Που ισχύει, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. (μονάδες 2)

(δ) Ρωτήσαμε 36 μαθητές πόσες ημέρες της εβδομάδας γυμνάζονται και οι απαντήσεις φαίνονται στον πίνακα:

1	0	2	4	0	0	2	0	2	0	1	1	2	3	0	4	4	1
0	2	3	3	3	1	1	4	1	1	2	2	3	2	1	1	0	3

- Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων. (μονάδα 0,5)
- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ένα κυκλικό διάγραμμα. (μονάδα 1)

Τιμές	Διαλογή	Συχνότητα	Επίκεντρη γωνία
0	III-III	8	80°
1	III-III	10	100°
2	III-III	8	80°
3	III-I	6	60°
4	IIII	4	40°
Σύνολο		36	360°



2^ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά 12cm. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και σημειώνουμε το σημείο τομής Μ των υψών του τριγώνου ΑΒΓ.

- i. Να βρεθεί το μήκος του ύψους ΑΔ και το εμβαδόν του ΑΒΓ. (μονάδες 2)

$$ΑΔ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

$$(ΑΒΓ) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\text{cm}^2$$

- ii. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΓ και το μήκος της πλευράς του ΓΜ. (μονάδες 1,5)

ΑΒΓ ισόπλευρο, άρα ΑΔ διάμεσος και ύψος. Επίσης, ΓΗ ύψος, διάμεσος και διχοτόμος, άρα η γωνία $\hat{M}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, στο ΓΜΔ ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{ΜΔ}{ΔΓ} = \frac{ΜΔ}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ΜΔ}{6}$$

$$ΜΔ = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

$$(ΒΜΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΜΔ}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2 = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{ΜΔ}{ΓΜ}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{ΜΓ}$$

$$ΜΓ = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

- iii. Με κέντρο το Μ και ακτίνα το μήκος ΜΔ να γραφεί ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ.

(συνέχεια θέματος 2^{ου})

- iv. Να δείξετε ότι το ύψος του τετραέδρου (ΚΜ) έχει μήκος $\upsilon = 4 \cdot \sqrt{6}$ cm.
 (μονάδα 1)

ΚΜΓ ορθογώνιο τρίγωνο (ύψος πυραμίδας, τα 2/3 του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ και η παράπλευρη ακμή της πυραμίδας ως υποτείνουσά του)

$$ΚΓ^2 = ΜΓ^2 + ΚΜ^2$$

$$12^2 = (4\sqrt{3})^2 + ΚΜ^2$$

$$144 - 48 = ΚΜ^2$$

$$ΚΜ^2 = 96\text{cm}^2$$

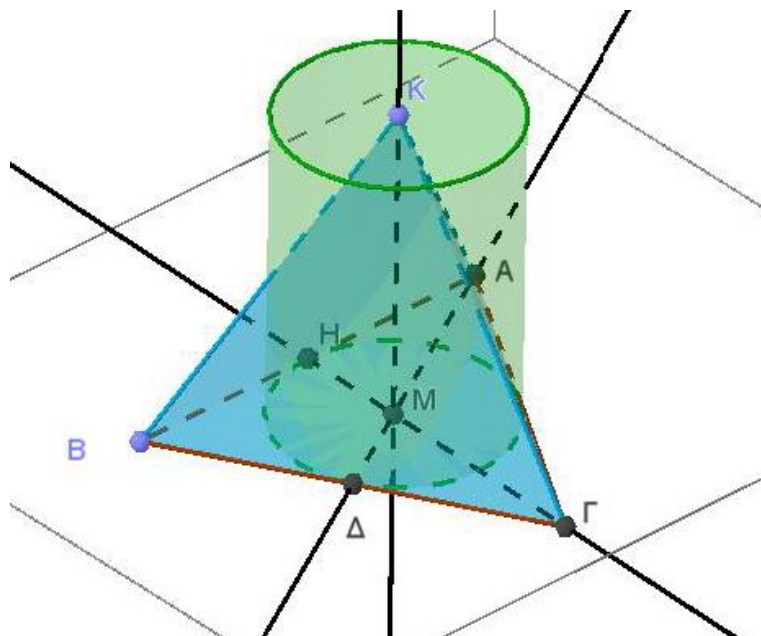
$$ΚΜ = \sqrt{96}\text{cm}$$

$$ΚΜ = 4\sqrt{6}\text{cm}$$

- v. Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου και ο όγκος του κυλίνδρου.
 (μονάδες 1,5)

$$V_{\text{τετραέδρου}} = \frac{1}{3} \cdot (ΑΒΓ) \cdot ΚΜ = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{6}\text{cm}^2 = 48\sqrt{18}\text{cm}^3$$

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon = \pi \cdot ΜΔ^2 \cdot ΚΜ\text{cm}^2 = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6}\text{cm}^2 = 48\pi\sqrt{6}\text{cm}^3$$



3^ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Κ (2,3). (μονάδα 0,5)

$$(\varepsilon_1): y = \alpha \cdot x$$

$$3 = \alpha \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y = \frac{3}{2} \cdot x$$

- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 , που έχει κλίση τον αριθμό $-\frac{2}{3}$ και διέρχεται από το σημείο Α (5, 1). (μονάδα 1)

$$(\varepsilon_2): y = \alpha \cdot x + \beta$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot x + \beta$$

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{13}{3}$$

$$(\varepsilon_2): y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{13}{3}$$

- iii. Να εξετάσετε αλγεβρικά αν η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Κ(2, 3). (μονάδα 1)

Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τον τύπο της ευθείας:

$$(\varepsilon_2): y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{13}{3}$$

$$3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{3} = \frac{9}{3}$$

Άρα, το σημείο Κ(2, 3) ανήκει στην ευθεία (ε_2)

- iv. Με τη βοήθεια των παραπάνω σημείων που γνωρίζετε τις συντεταγμένες του, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με σημείο Ο (0, 0), η αρχή των αξόνων. (μονάδα 0,5)

Σχήμα!

- v. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες γγ' (να ονομαστεί N) και x'x (να ονομαστεί M). (μονάδα 1)

$$N(0, \frac{13}{3}) \text{ και } M(6,5,0) \\ 0 = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x = \frac{13}{3} \Leftrightarrow x = 6,5$$

- vi. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου KOM. (μονάδα 1)

$$(KOM) = \frac{OM \cdot KH}{2} = \frac{6,5 \cdot 3}{2} \text{ τ.μ.} = 9,75 \text{ τ.μ.}, \text{ όπου } H(2,0) \text{ και } KH \text{ ύψος} \\ \text{του τριγώνου KOM προς την OM.}$$

- vii. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο KOM είναι ορθογώνιο. (μονάδες 1,5)

Αρκεί να εξετάσουμε αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OKH:

$$KO^2 = KH^2 + OH^2$$

$$KO^2 = 3^2 + 2^2$$

$$KO^2 = 13 \text{ τ.μ.}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο KHM:

$$KM^2 = KH^2 + HM^2$$

$$KM^2 = 3^2 + (4,5)^2$$

$$KM^2 = 9 + \frac{81}{4}$$

$$KM^2 = \frac{117}{4} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Και } OM^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4} \text{ τ.μ.}$$

Άρα:

$$OM^2 = KM^2 + KO^2$$

$$\frac{169}{4} = \frac{117}{4} + 13$$

$$\frac{169}{4} = \frac{117}{4} + \frac{52}{4}$$

Που ισχύει! Άρα, KOM ορθογώνιο τρίγωνο.

