Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

Ιδιότητες Δυνάμεων

Πολύτροπη Αρμονία

Δυνάμεις-Βασικές ιδιότητες

- **Τι είναι δύναμη;**

$$a^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\text{ο πολλαπλασιαμός επαναλαμβάνεται } \nu \text{ φορές}}$$

$$\alpha^{\nu}$$

Το α λέγεται βάση

Το ν λέγεται εκθέτης

Ο εκθέτης και η βάση μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ρητός αριθμός.

Πρώτες ιδιότητες

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = \alpha$$

$$(-a)^\nu = \begin{cases} +a^\nu, & \text{αν ν άρτιος αριθμός} \\ -a^\nu, & \text{αν ν περιττός αριθμός} \end{cases}$$

Για παράδειγμα :

$(-2)^{10} \rightarrow$ Το πρόσημο του αριθμού θα είναι θετικό αφού το 10, ο εκθέτης του είναι άρτιος.

Πιο συγκεκριμένα :

$(-2)^{10} = +2^{10} = 1024$

Ενώ αν ο εκθέτης μας ήταν κάποιος περιττός αριθμός, όπως το 9.

$(-2)^9 \rightarrow$ Το πρόσημο του αριθμού θα είναι αρνητικό αφού το 9

Πιο συγκεκριμένα :

$(-2)^9 = -2^9 = -512$

Ιδιότητες Ρητών Αριθμών

Για να δούμε τώρα τις καινούριες μας ιδιότητες.
Έχουμε δει και εξασκηθεί στις δυνάμεις όταν ο εκθέτης μας είναι φυσικός αριθμός.
Τι ιδιότητες έχουμε όμως όταν ο εκθέτης (ή και η βάση) μας είναι ρητός αριθμός

Ιδιότητες		Παραδείγματα Ιδιοτήτων
$\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$	$\Rightarrow$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$	$\Rightarrow$	$\frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10} : 2^9 = 2^{10-9}$
$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$	$\Rightarrow$	$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$	$\Rightarrow$	$(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$

Ιδιότητες Ρητών Αριθμών

Και αν ο εκθέτης μας είναι αρνητικός αριθμός;

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} = \frac{\beta^{\nu}}{\alpha^{\nu}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Ιδιότητες Ρητών Αριθμών

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} &= \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \\ (\alpha\cdot\beta)^{\nu} &= \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\end{aligned}\right\}$$ Προσοχή οι συγκεκριμένες ιδιότητες ισχύουν μόνο για πολλαπλασιασμό και διαίρεση

Για παράδειγμα στην πρόσθεση:

$\rightarrow (2+3)^2 \neq 2^2+3^2=4+9=13$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων
θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις
δηλαδή ως εξής :

$$(2+3)^2=(5)^2=25$$

Και για παράδειγμα στην αφαίρεση:

$\rightarrow (2-3)^3 \neq 2^3-3^3=8-27=-19$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων
θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις
δηλαδή ως εξής :

$$(2-3)^3=(-1)^3=(-1)(-1)(-1)=-1$$

Εφαρμογές

Ας δούμε μερικές απλές εφαρμογές για τις ιδιότητες των δυνάμεων

Εφαρμογή 1

Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς :

$\alpha)\ 85^{126}\cdot 85^{42}$ και 85^{168} $\quad$ $\beta)\ 42^{32}$ και $42^{56}:42^{25}$ $\quad$ $\gamma)\ (0,2)^{60}\cdot 5^{60}$ και 1

Λύση

$\alpha)\ 85^{126}\cdot 85^{42}$ και 85^{168}

Έχουμε ότι $85^{126}\cdot 85^{42}=85^{126+42}=85^{168}$ $\Rightarrow$ Άρα οι δύο αριθμοί είναι ίσοι.

$\beta)\ 42^{32}$ και $42^{56}:42^{25}$

Έχουμε ότι $42^{56}:42^{25}=42^{56-25}=42^{31}$ $\Rightarrow$ Άρα ο αριθμός 42^{32} είναι μεγαλύτερος

$\gamma)\ (0,2)^{60}\cdot 5^{60}$ και 1

Έχουμε ότι : $(0,2)^{60}\cdot 5^{60}=(0,2\cdot 5)^{60}=1^{60}=1$ $\Rightarrow$ Άρα οι δύο αριθμοί είναι ίσοι.

Εφαρμογή 2

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω αριθμών :

α) $(-4)^2$ ⇒ Το $(-4)^2 = +4^2 = +16$

β) $(-108{,}26)^4$ ⇒ Το $(-108{,}26)^4 = +108{,}26^4$

γ) $-(-4)^{211}$ ⇒ Το $(-4)^{211} = -4^{211}$, άρα $-(-4^{211}) = +4^{211}$

δ) $-[-(-2)]^{50}$ ⇒ Το $[-(-2)]^{50}$, επειδή το 50 είναι άρτιος αριθμός το $[-(-2)]^{50} = +2^{50}$, και με το - που έχει μπροστά του θα γίνει αρνητικός αριθμός.

ε) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{81}$ ⇒ Το $\left(-\frac{1}{5}\right)^{81} = -\left(\frac{1}{5}\right)^{81}$

Εφαρμογές 3 και 4

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις έξυπνα με την χρήση των δυνάμεων:

$\alpha)\ (0,25)^{26}(4)^{26} \qquad \beta)\ 8^{56}:8^{54} \qquad \gamma)\ (0,9)^{5}:(0,45)^{5}$

Λύση

$\alpha)\ (0,25)^{26}(4)^{26} = (0,25\cdot 4)^{26} = (1)^{26} = 1$

$\beta)\ 8^{56}:8^{54} = 8^{56-54} = 8^{2} = 16$

$\gamma)\ (0,9)^{5}:(0,45)^{5} = (0,9:0,45)^{5} = (2)^{5} = 32$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$\mathrm{A} = 5^{26} - (-8)^{15} - (-5)^{26} - 8^{15}$$

Λύση

Έχουμε ότι από την ιδιότητα:

$$(-a)^{\nu} = \begin{cases} +a^{\nu}, & \text{αν ν άρτιος αριθμός} \\ -a^{\nu}, & \text{αν ν περιττός αριθμός} \end{cases}$$

Άρα προκύπτει :

$(-8)^{15} = -8^{15}$

$-(-5)^{26} = -(+5)^{26} = -5^{26}$

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 5^{26} - (-8)^{15} - (-5)^{26} - 8^{15} \\ &= 5^{26} + 8^{15} - (+5)^{26} - 8^{15} \\ &= \cancel{5}^{26} + \cancel{8}^{15} - \cancel{5}^{26} - \cancel{8}^{15} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Εφαρμογές

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Εφαρμογές

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $5^4 \bullet 5^{-6} = 5^{4+(-6)} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

β) $5:5^{-2} = 5^{1-(-2)} = 5^{1+2} = 5^3 = 125$

γ) $(0,4)^{-3} \bullet 5^{-3} = (0,4 \bullet 5)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

δ) $\left[(-2)^3\right]^{-2} =$

$(-2)^{3\bullet(-2)} =$

$(-2)^{-6} =$

$\frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{+2^6} = \frac{1}{64}$

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να γράψετε τη δύναμη που δίνεται σαν δύναμη με φυσικό εκθέτη και να βρείτε το πρόσημό της:

α) $2^{-40} = \frac{1}{2^{40}}$

β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-15} = 2^{+15}$

γ) $(-5)^{-32} = \left(\frac{1}{-5}\right)^{+32} = \frac{1}{(-5)^{32}} = \frac{1}{+5^{32}}$

δ) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-16} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{+16} = \left(+\frac{4}{3}\right)^{16} = \frac{4^{16}}{3^{16}}$

Πως θα μπορούσαμε να το απλοποιήσουμε περισσότερο;

$$\frac{4^{16}}{2^{16}} = \frac{\left(2^2\right)^{16}}{2^{16}} = \frac{2^{2\bullet 16}}{2^{16}}$$

$$= \frac{2^{32}}{2^{16}} = 2^{32-16} = 2^{16}$$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις :

α) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

β) $(-3)^{-2} = \left(+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

γ) $(-3)^{10} = +3^{10}$

δ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3)^2 = 9$

ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^{+2} = +3^2 = 9$

στ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

ζ) $\left[-\frac{1}{3} + 2\bullet\left(-\frac{1}{7}\right)\right]^0 = 1$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A=(-8)^{20}-8^{20}=+8^{20}-8^{20}=0$$

$$B=(-6)^{15}+6^{15}=-6^{15}+6^{15}=0$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A=x^{35}+(-x)^{35}=x^{35}-x^{35}=0$$

$$B=x^{56}-(-x)^{56}=x^{56}-x^{56}=0$$

Εφαρμογές

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $5^4 \bullet 5^{-6} = 5^{4+(-6)} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

β) $5:5^{-2} = 5^{1-(-2)} = 5^{1+2} = 5^3 = 125$

γ) $(0,4)^{-3} \bullet 5^{-3} = (0,4 \bullet 5)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

δ) $\left[(-2)^3\right]^{-2} =$

$(-2)^{3\bullet(-2)} =$

$(-2)^{-6} =$

$\frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{+2^6} = \frac{1}{64}$

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να γράψετε τη δύναμη που δίνεται σαν δύναμη με φυσικό εκθέτη και να βρείτε το πρόσημό της:

α) $2^{-40} = \frac{1}{2^{40}}$

β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-15} = 2^{+15}$

γ) $(-5)^{-32} = \left(\frac{1}{-5}\right)^{+32} = \frac{1}{(-5)^{32}} = \frac{1}{+5^{32}}$

δ) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-16} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{+16} = \left(+\frac{4}{3}\right)^{16} = \frac{4^{16}}{3^{16}}$

Πως θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε περισσότερο;

$$\frac{4^{16}}{2^{16}} = \frac{\left(2^2\right)^{16}}{2^{16}} = \frac{2^{2\bullet 16}}{2^{16}}$$

$$= \frac{2^{32}}{2^{16}} = 2^{32-16} = 2^{16}$$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις :

α) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

β) $(-3)^{-2} = \left(+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

γ) $(-3)^{10} = +3^{10}$

δ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3)^2 = 9$

ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^{+2} = +3^2 = 9$

στ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

ζ) $\left[-\frac{1}{3} + 2\bullet\left(-\frac{1}{7}\right)\right]^0 = 1$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A=(-8)^{20}-8^{20}=+8^{20}-8^{20}=0$$

$$B=(-6)^{15}+6^{15}=-6^{15}+6^{15}=0$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A=x^{35}+(-x)^{35}=x^{35}-x^{35}=0$$

$$B=x^{56}-(-x)^{56}=x^{56}-x^{56}=0$$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί τα παρακάτω είναι ίσα;

$\alpha)\ 27^{10} = 3^{30}$ και $3^{30} = 9^{15}$

Λύση

$\alpha)\ 27^{10} = 3^{30}$ και $3^{30} = 9^{15}$

$$27^{10} = \left(3^{3}\right)^{10} = 3^{3 \cdot 10} = 3^{30}$$

Το 27 μπορεί να γραφτεί και ως 3 εις την 3η

Το 30 μπορεί να γραφτεί και ως 2 επί 15

$$3^{30} = \left(3^{2}\right)^{15} = 9^{15}$$

Εφαρμογές (Συνέχεια….)

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί τα παρακάτω είναι ίσα;

β) $32^6 = 2^{30}$ και $2^{30} = 4^{15}$ και $4^{15} = 64^5$

Λύση

β) $32^6 = 2^{30}$ και $2^{30} = 4^{15}$ και $4^{15} = 64^5$

Το 32 μπορεί να γραφτεί και ως 2 εις την 5

$$32^6 = \left(2^5\right)^6 = 2^{6 \cdot 5} = 2^{30}$$

Το 30 μπορεί να γραφτεί ως 2 επί 15

$$2^{30} = \left(2^2\right)^{15} = (4)^{15}$$

Το 15 μπορεί να γραφτεί και ως 3 επι 5

$$(4)^{15} = \left(4^3\right)^5 = (64)^5$$

Το 4 εις την 3 ισούται με 64

Εφαρμογές (Συνέχεια…)

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

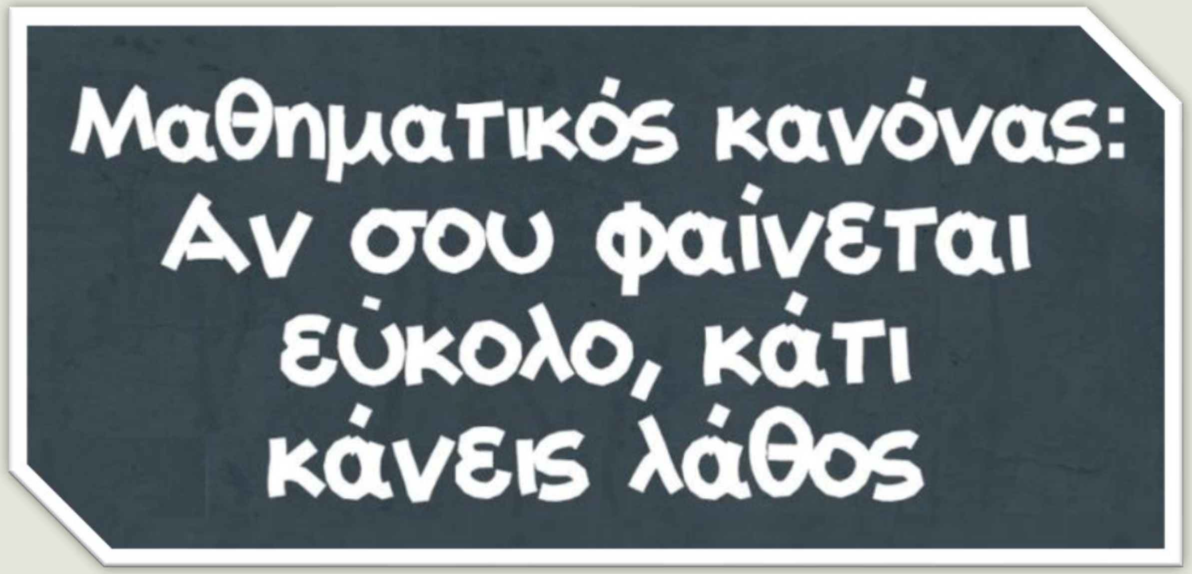
$$\alpha)\ \frac{2\bullet 2^{-4}\bullet 2^{-5}\bullet 2^{3}}{2^{-6}\bullet 2^{-1}}=\frac{2^{1-4-5+3}}{2^{-6-1}}=\frac{2^{-3-5+3}}{2^{-7}}=\frac{2^{-8+3}}{2^{-7}}=\frac{2^{-5}}{2^{-7}}=2^{-5-(-7)}=2^{-5+7}=2^{+2}=4$$

$$\beta)\ \left(\overbrace{2^{-1}\bullet 2^{-8}\bullet 2^{10}\bullet 2^{-4}}\right)^{-2}=\left(2^{\overbrace{-1+(-8)+10+(-4)}}\right)^{-2}=\left(2^{-3}\right)^{-2}=2^{-3\bullet(-2)}=2^{6}=64$$

Για να υπολογίσουμε στο πρόχειρο τον εκθέτη :

$$-1+(-8)+10+(-4)=-1-8+10-4=-9+10-4=+1-4=-3$$

ΤΕΛΟΣ


Μαθηματικός κανόνας:
Αν σου φαίνεται
εύκολο, κάτι
κάνεις λάθος