ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

Γ ΄ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ:26-04-22

1Ο ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ….

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ(4)

ΘΕΩΡΙΑ

1ο ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

i. Τι ονομάζεται μονώνυμο; Τι ονομάζεται συντελεστής, κύριο μέρος και βαθμός ενός μονωνύμου; Ποια μονώνυμα λέγονται αντίθετα;

ii. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

iii. Να γράψετε τα αναπτύγματά τους και να αποδείξετε τις ταυτότητες:

   a. $(\alpha+\beta)^2 =$

   b. $(\alpha-\beta)^3 =$

iv. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; Με τι ισούται ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων;

v. Ποιες αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται ρητές;

2ο ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

i. Τι ονομάζεται κενό σύνολο; Τι ονομάζεται ένωση δύο συνόλων Α, Β; Τι ονομάζεται τομή δύο συνόλων Α,Β; Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός συνόλου Α ως προς ένα βασικό σύνολο Ω;

ii. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

iii. Τι ονομάζεται πολυώνυμο; Τι ονομάζεται ταυτότητα;

iv. Να γράψετε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας αμβλείας γωνίας. Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 4\hat{\Gamma}$ και $B\hat{I}\Gamma = 105^\circ$, όπου Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ (Ι: έκκεντρο).

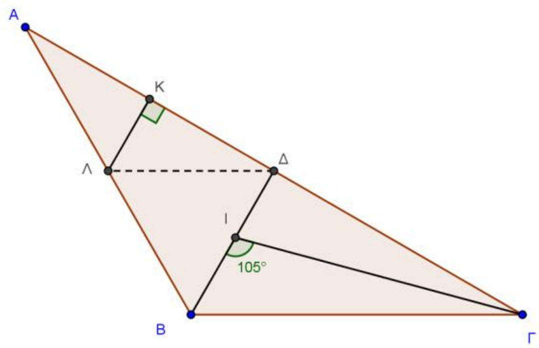
Α1. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Α2. Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ, όπου Δ το σημείο που η προέκταση του ΒΙ τέμνει την ΑΓ.

Α3. Αν Κ σημείο της ΑΓ και Λ σημείο της ΑΒ τέτοια, ώστε

$\mathrm{AK} = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{A\Gamma}$ και ΛΚ κάθετο στην ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Λ είναι μέσο της ΑΒ.
ii. Το τρίγωνο ΛΔΒ είναι ισόπλευρο.
Iιι. Αν ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΑΚΛ προς το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι ίσος με κ, να βρεθεί η τιμή του κ.



ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3 = 2\beta(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta(\alpha+\beta).$$

Β2. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x – 1 και y – 1 είναι ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι ο αριθμός x·y + 1 είναι μικρότερος του αριθμού x + y.

Β3. Δίνονται τα πολυώνυμα: $\mathrm{A}(x) = x(x-1)^3(x+1)^2$, $\mathrm{B}(x) = x(x+1)(x-1)^3$

i. Για ποιες τιμές του x δεν ορίζεται η κλασματική αλγεβρική παράσταση: $\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}$;

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $\mathrm{A}(x) - 3\cdot\mathrm{B}(x) = 0$, όπου Α(x), Β(x) τα πολυώνυμα που δίνονται παραπάνω.

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x^2+x-6=0 \quad \text{και} \quad 2x^2-5x+2=0$$

Γ2. Δίνεται το τριώνυμο: $\alpha\cdot x^2-4x+\lambda^2$, όπου α είναι η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων (ερώτημα Γ1).

$$2\cdot x^2-4x+\lambda^2$$

Να βρεθεί το λ, ώστε το τριώνυμο να έχει μία διπλή λύση. Στη συνέχεια, να βρείτε τη διπλή αυτή λύση.

Γ3. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} &x=3+y \\ &xy^2+3x=7 \end{aligned}$$

Γ4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\dfrac{3x^3-4x^2-5x+2}{3x-1}$

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Ενδεικτικές λύσεις στις ασκήσεις.

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 4\hat{\Gamma}$ και $B\hat{I}\Gamma = 105^\circ$, όπου Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ (Ι: έκκεντρο).

Α1. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο τρίγωνο ΒΙΔ

$$2\hat{\Gamma} + \hat{I} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 180^o$$

$$4\hat{\Gamma} + 2\cdot 105^o + \hat{\Gamma} = 360^o$$

$$5\cdot\hat{\Gamma} = 150^o$$

$$\hat{\Gamma} = 30^o$$

άρα $A\hat{B}\Gamma = 120^o$

$B\hat{A}\Gamma = 30^o$

Α2. Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ, όπου Δ το σημείο που η προέκταση του ΒΙ τέμνει την ΑΓ.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού έχει δύο γωνίες ίσες, άρα η διχοτόμος από την κορύφη του είναι και μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς.

Α3. Αν Κ σημείο της ΑΓ και Λ σημείο της ΑΒ τέτοια, ώστε $AK = \frac{1}{4}\cdot A\Gamma$ και ΛΚ κάθετο στην ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Λ είναι μέσο της ΑΒ.

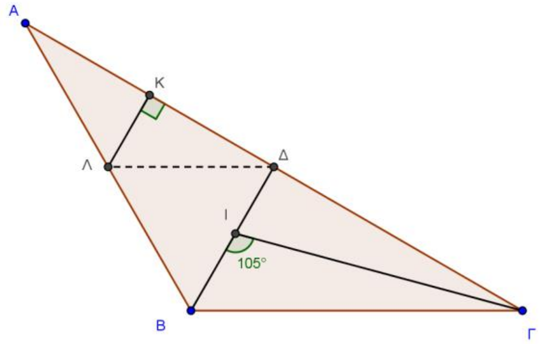
Στο τρίγωνο ΑΔΒ το Κ είναι το μέσο της ΑΔ και το ΛΚ είναι παράλληλο στη ΒΔ, αφού ΚΛ κάθετη στην ΑΓ και ΒΔ κάθετη στην ΑΓ επίσης, άρα μεταξύ τους παράλληλες.

Άρα, το Λ είναι το μέσο της ΑΒ. (ειδική περίπτωση του Θ.Θ.)

ii. Το τρίγωνο ΛΔΒ είναι ισόπλευρο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΛΔ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα ισούται με την ΛΒ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ κι επειδή η γωνία $\Lambda\hat{\mathrm{B}}\Delta = 60^{o}$, το τρίγωνο ΛΔΒ είναι ισόπλευρο.

iii. Αν ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΑΚΛ προς το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι ίσος με κ, να βρεθεί η τιμή του κ.



Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΔΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\mathrm{K}\mathrm{A}}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{A}\Gamma}{\frac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma} = \frac{1}{2}$.Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους εις την δευτέρα. Άρα, $\kappa = \frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^3 - (\alpha-\beta)^3 = 2\beta(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\mathrm{A}\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - \left(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3\right) =$$

$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - \alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3 =$$

$$= 6\alpha^2\beta + 2\beta^3$$

$$\mathrm{B}\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = 2\beta(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\beta\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) + 4\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 =$$

$$= 2\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 + 2\beta^3 + 4\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 =$$

$$= 6\alpha^2\beta + 2\beta^3$$

Άρα : Α μέλος = Β μέλος

B2. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x – 1 και y – 1 είναι ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι ο αριθμός x·y + 1 είναι μικρότερος του αριθμού x + y.

Θα ελέγξουμε το πρόσημο της διαφοράς τους:

$$(xy+1)-(x+y)=xy+1-x-y=xy-x+1-y=x(y-1)-(y-1)=$$
$$=(y-1)(x-1)<0, \text{άρα}$$
$$xy+1<x+y$$

B3. Δίνονται τα πολυώνυμα: $A(x)=x(x-1)^3(x+1)^2 \quad , B(x)=x(x+1)(x-1)^3$

i. Για ποιες τιμές του x δεν ορίζεται η κλασματική αλγεβρική παράσταση: $\frac{A(x)}{B(x)}$;

Για x=0 ή 1 ή -1 διότι οι τιμές αυτές μηδενίζουν τον παρανομαστή

iii. Να λυθεί η εξίσωση: $A(x)-3\cdot B(x)=0$, όπου A(x), B(x) τα πολυώνυμα που δίνονται παραπάνω.

$$A(x)-3\cdot B(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-1)^3(x+1)^2-3x(x+1)(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-1)^3(x+1)[(x+1)-3]=0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-1)^3(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{ή} \\ x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \\ \text{ή} \\ x=2 \end{array}\right\}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$x^2+x-6=0 \quad \text{και} \quad 2x^2-5x+2=0$

$$\begin{aligned}
&x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \\
&x^2-2x+3x-6=0 \Leftrightarrow \\
&x(x-2)+3(x-2)=0 \Leftrightarrow \\
&(x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow \\
&\left\{\begin{matrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-3 \end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \\
&2x^2-4x-x+2=0 \Leftrightarrow \\
&2x(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow \\
&(x-2)(2x-1)=0 \Leftrightarrow \\
&\left\{\begin{matrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

Λύνονται και με Διακρίνουσα

Γ2. Δίνεται το τριώνυμο: $\alpha\cdot x^2-4x+\lambda^2$, όπου α είναι η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων (ερώτημα Γ1). Να βρεθεί το λ, ώστε το τριώνυμο να έχει μία διπλή λύση. Στη συνέχεια, να βρείτε τη διπλή αυτή λύση.

Το τριώνυμο γίνεται $2\cdot x^2-4x+\lambda^2$

Για να έχει μία διπλή ρίζα πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ίση με το μηδέν:

$$\begin{aligned}
&\Delta=0 \Leftrightarrow \\
&\beta^2-4\alpha\gamma=0 \Leftrightarrow \\
&(-4)^2-4\cdot 2\cdot\lambda^2=0 \Leftrightarrow \\
&16-8\lambda^2=0 \Leftrightarrow \\
&16=8\lambda^2 \Leftrightarrow \\
&2=\lambda^2 \Leftrightarrow \\
&\lambda=\pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Η διπλή ρίζα είναι : $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{+4}{4}=1$

Γ3. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 + y(1) \\ xy^2 + 3x = 7(2) \end{array}\right\}$$

$(2) \Leftrightarrow (3+y)y^2 + 3(3+y) = 7 \Leftrightarrow$

$3y^2 + y^3 + 9 + 3y = 7 \Leftrightarrow$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$y^3 + 2y^2 + y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$y^2(y+2) + y^2 + 2y + y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$y^2(y+2) + y(y+2) + (y+2) = 0 \Leftrightarrow$

$(y+2)(y^2 + y + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y + 2 = 0 \\ \text{ή} \\ y^2 + y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2 \\ \text{ή} \\ \text{αδύνατη διότι } \Delta = -3 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$y = -2$ τότε x=1 άρα λύση (x,y)=(1,-2)

Ή

$y^3 + 3y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(y+1)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(y+1)^3 = -1 \Leftrightarrow$

$y + 1 = -1 \Leftrightarrow$

$y = -2$ τότε $x = 1$

Λύση (x,y)=(1,-2)

Γ4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\frac{3x^3-4x^2-5x+2}{3x-1}$

$\text{Πρέπει}: x \neq \frac{1}{3}$

$$\frac{3x^3-4x^2-5x+2}{3x-1}=$$
$$=\frac{3x^3-x^2-3x^2-5x+2}{3x-1}=$$
$$=\frac{x^2(3x-1)-(3x^2+5x-2)}{3x-1}=$$
$$\frac{x^2(3x-1)-(3x-1)(x+2)}{3x-1}=$$
$$=\frac{(3x-1)(x^2-x-2)}{3x-1}=$$
$$=x^2-x-2$$