ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ: 12-04-22

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α) Κυρτή συνάρτηση

β) πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Α3.Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β)Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

δ) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Μια συνάρτηση $f:A\to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f:[0,1]\to R$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)=f'(1)=0$
- $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+x$

Β1. Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1=0$ και $x_2=1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι :

α) $g(1)=0$ **Μονάδες 6**

β) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi)=2\xi-1$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)f'(x)dx$

Μονάδες 5

β) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$, ώστε $f'(x_0)=2\int_0^1 f(x)dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(-1,+\infty)\to R^{*}$ με $f(0)=g(0)=1$ και $2f'(x)+f^{2}(x)g(x)=2g'(x)+f(x)g^{2}(x)=0$, για κάθε x> -1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και f = g

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ για κάθε $x>-1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E(α) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x = α και x = α+1, όπου α>0 καθώς και το όριο $A=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με τις ιδιότητες:

f(π) = 1, f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ R και $2f'(x) = f^{2}(x)\cdot ημx$ για

κάθε x ∈R .

Δ1. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτηση f είναι :

$f(x)=\dfrac{2}{συνx+3}$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Δ2. Αν g είναι μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με $g(x) > 0$ και $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = f(x)$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι:

α) $0 \le \ln\left[\left(\dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2 \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}\right] \le \beta - \alpha$ για κάθε α, β ∈ R με α < β.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \ln(g(x))$, $x \in R$ τέμνει την ευθεία y = 2x, το πολύ σε ένα σημείο

γ) $1 \le E \le 2$, όπου E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία x = 2.

Μονάδες 17(8+4+5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 6

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 9

Α3.

Λ – Σ – Σ – Λ – Σ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α)

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$, οπότε $g'(0)=f'(0)+1=1$ και $g'(1)=f'(1)-1=-1$. Επίσης $g(0)=f(0)=0$ και $g(1)=f(1)$ (1) οπότε οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(0,g(0))$ και $B(1,g(1))$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$\varepsilon_A: y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$

και $\varepsilon_B: y-g(1)=g'(1)(x-1) \Rightarrow y-f(1)=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+1+f(1)$.

Το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ε_A και ε_B, οπότε έχουμε: $y_0=\frac{1}{2}$ και $y_0=-\frac{1}{2}+1+f(1)$. Επομένως έχουμε $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+1+f(1) \Rightarrow f(1)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(1)=0$

Μονάδες 6

β)

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1) της εξίσωσης $g(x)-x^2+x=0$

Ορίζουμε συνάρτηση $h(x)=g(x)-x^2+x$

Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $h'(x)=g'(x)-2x+1$.

$h(0)=g(0)=0$

$h(1)=g(1)-1^2+1=g(1)=f(1)=0$

δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)-2\xi+1=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=2\xi-1 \;\; f'(\xi)=0$.

Μονάδες 7

B2.

α)

Είναι :

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x-1)' f(x)dx=\left[(x-1)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 (x-1)f'(x)dx \overset{f(0)=0}{=}$$

$$=\int_0^1 (1-x)f'(x)dx \quad (6)$$

Μονάδες 5

β)

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.
Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[0,1]$, τότε έχουμε: $m \le f'(x) \le M$. Επειδή $1-x \ge 0$ έχουμε:

$$(1-x)m \le (1-x)f'(x) \le (1-x)M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int_0^1 (1-x)dx \le \int_0^1 (1-x)f'(x)dx \le M\int_0^1 (1-x)dx$$

Είναι $\int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

οπότε έχουμε $\frac{1}{2}m \le \int_0^1 (1-x)f'(x)dx \le \frac{1}{2}M \overset{(6)}{\Rightarrow} m \le 2\int_0^1 f(x)dx \le M$.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2\int_0^1 f(x)dx$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f', άρα υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Αφού $f(x), g(x) \in R^*, \forall x \in (-1,+\infty)$ και f, g συνεχείς ως παραγωγίσιμες, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο στο $(-1,+\infty)$.
$f(0) = g(0) = 1 > 0$,άρα $f(x), g(x) > 0, \forall x \in (-1,+\infty)$
Ισχύουν :

$$2f'(x) + f^2(x)g(x) = 0 \overset{\cdot g(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x)g(x) + f^2(x)g^2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)g(x) = -\frac{f^2(x)g^2(x)}{2} \qquad (1)$$

Ομοίως

$$2g'(x)+f(x)g^2(x)=0 \overset{\cdot g(x)}{\Leftrightarrow} 2g'(x)f(x)+f^2(x)g^2(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x)f(x)=-\frac{f^2(x)g^2(x)}{2} \qquad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε :

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{:g^2(x)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0,\ \forall x\in(-1,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Για x = 0 : $\frac{f(0)}{g(0)}=c \Leftrightarrow c=1$

Άρα $\frac{f(x)}{g(x)}=1,\ \forall x\in(-1,+\infty) \Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \forall x\in(-1,+\infty)$

Μονάδες 6

Γ2.

Έχουμε :

$$2f'(x)+f^2(x)g(x)=0 \overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x)+f^3(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x)f^{-3}(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)'=\left(-\frac{1}{2}x\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-2}(x)}{-2}=-\frac{1}{2}x+c_1,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Για x = 0 : $\frac{f^{-2}(0)}{-2}=-\frac{1}{2}\cdot 0+c_1 \Leftrightarrow c_1=-\frac{1}{2}$

Άρα

$$\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)}=x+1 \Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{x+1},\ \forall x\in(-1,+\infty) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=g(x),\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Μονάδες 6

Γ3.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=-\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{x+1}=-\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}<0,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Άρα f **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1,+\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$

► $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=+\infty$

Άρα $\boxed{x = -1}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

► $\lim\limits_{x\to +\infty)} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=0$

Άρα $\boxed{y = 0}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες 6

Γ4.

$$E(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+1}|f(x)|dx\overset{f(x)>0}{=}\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(\alpha)=2\left[\sqrt{x+1}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}=2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}\text{ τ.μ.}$$

$$A=\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(2\frac{\alpha+2-\alpha-1}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}\right)=0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Επειδή $f(x)\neq 0,\forall x\in R$ η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{2}\eta\mu x \leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\right)' \quad \forall x \in R$$

άρα υπάρχει πραγματική σταθερά c :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + c \quad \forall x \in R$$

Για $x = \pi : \frac{1}{f(\pi)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\pi + c \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$

Άρα $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x + 3} \quad \forall x \in R$

Η f είναι συνεχής στο R και $\forall x \in R$ ισχύουν:

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow 2 \le 3 + \sigma\upsilon\nu x \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x} \le \frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{2}{3+\sigma\upsilon\nu x} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in R \text{ και } f(\pi) = 1, f(0) = \frac{1}{2}$$

Επομένως: $f_{min} = \frac{1}{2} = f(0)$ $f_{max} = 1 = f(\pi)$ και f συνεχής ως πράξεις συνεχών οπότε παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές

Άρα $f(R) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Μονάδες 8

Δ2.

α)

Η ζητούμενη γράφεται ισοδύναμα :

$$0 \le \ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2 + \ln\left(\frac{e^\alpha}{e^\beta}\right) \le \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 \le 2\ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \ln\left(e^{\alpha-\beta}\right) \le \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 2\ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \alpha - \beta \le \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha \le 2\left(\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)\right) \le 2\beta - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta - \alpha} \le 1 \qquad (1)$$

Έστω $\varphi(x)=\ln(g(x))$, $x \in R$:

φ συνεχής στο [α, β] ως σύνθεση συνεχών

φ παρ/μη στο (α, β) με $\varphi'(x)=\left(\ln(g(x))\right)'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=f(x)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ στο (α, β) :

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\left(g(\beta)\right)-\ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\ln\left(g(\beta)\right)-\ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}$$

Από Δ1: $f(R)=\left[\frac{1}{2},1\right]$, άρα $\frac{1}{2}\le f(\xi)\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le\frac{\ln\left(g(\beta)\right)-\ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}\le 1$

Άρα εδείχθη η (1)

β)

έστω ότι οι C_φ και η y = 2x τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία με τετμημένες κ, λ και έστω κ < λ

Αν K(x)=φ(x)-2x τότε:

K συνεχής στο [κ, λ] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

K παρ/μη στο (κ, λ) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K'(x)=\varphi'(x)-2=f(x)-2$

K(κ) = K(λ)=0

Από Θεώρημα Rolle υπάρχει

$x_0\in(\kappa,\lambda):K'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-2=0\Leftrightarrow f(x_0)=2$ Άτοπο

αφού $f(R)=\left[\frac{1}{2},1\right]$.

γ)

για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $f(x) > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^2 f(x)dx$.

Ισχύουν:

$$\frac{1}{2} \le f(x) \le 1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{2}dx \le \int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 1dx \Rightarrow \frac{1}{2}[x]_0^2 \le E \le [x]_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2-0) \le E \le 2-0 \Rightarrow 1 \le E \le 2$$

Μονάδες 17(8+4+5)