

ΙΔΙΩΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ &

ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ... ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)..

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

A2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

A3. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

A4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι : $f'(1) = 0$, αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1.

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow a = -6$$

Για $a = -6$, η f γίνεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow$$

x	1	3
---	---	---

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$	+	-	+
f	↑	↓	↑

Στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Και στο $[1, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f παρουσιάζει : τοπικό μέγιστο στη θέση $x=1$, το $f(1)=1$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=3$, το $f(3)=-3$.

B2. Από ερώτημα (B1)

1^{ος} τρόπος λύσης , μέσω του Θ.Bolzano στα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, +\infty)$ και είναι μόνο 3 , αφού η f είναι 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο, άρα έχει το πολύ 3 ρίζες. Άρα οι 3 ρίζες θα ναι και μοναδικές.

2^{ος} τρόπος λύσης , μέσω συνόλου τιμών της f.

$f((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$, και συγκεκριμένα $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$, άρα το $0 \in [-3, 1]$

άρα θα υπάρχει $x_1 \in [0, 1]$, τ.ω. $f(x_1) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό , αφού η f είναι γν. αύξουσα

$f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = [-3, 1]$, άρα το $0 \in [-3, 1]$,

άρα θα υπάρχει $x_2 \in [1, 3]$, τ.ω. $f(x_2) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό , αφού η f είναι γν. φθίνουσα

$f([3, +\infty)) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$, άρα το $0 \in [-3, 1]$

άρα θα υπάρχει $x_3 \in [3, +\infty)$, τ.ω. $f(x_3) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό , αφού η f είναι γν. αύξουσα

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$6(x - 2)$	-		+
f	∩		∪

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα δέχεται εφαπτομένη , άρα παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $(2, f(2))$

B4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$, είναι η

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

$$y - f(\xi) = xf'(\xi) - f'(\xi)\xi$$

$$: y = xf'(\xi) - f'(\xi)\xi + f(\xi)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $B(\xi, g(\xi))$, είναι η :

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$$

Άρα

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow y - \xi - f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Rightarrow y - \xi - f(\xi) = x - \xi + f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow$$

$$y - f(\xi) = x + f'(\xi)(x - \xi) \Rightarrow$$

$$y - f(\xi) = xf'(\xi) - f'(\xi)\xi + x \Rightarrow$$

$$y = xf'(\xi) + x - f'(\xi)\xi + f(\xi)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής και των δύο εξισώσεων με τον άξονα $y'g$, θα πρέπει $x=0$.

Από το οποίο προκύπτουν οι ίδιες εξισώσεις. Άρα τέμνουν τον $y'g$ στο ίδιο ακριβώς σημείο.

$$y = xf'(\xi) + x - f'(\xi)\xi + f(\xi) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -f'(\xi)\xi + f(\xi)$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ.1

Ας ελέγξουμε την f ως προς τη συνέχεια.

Στο $x_0 = 0$, για να είναι συνεχής θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0$$

Ας ελέγξουμε την f ως προς τη παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$.

Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, θα πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ.2 Κατακόρυφες: Δεν έχει αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μη κατακόρυφες:

Στο $-\infty$, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$, αφού

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \eta \mu x \leq 1 \Rightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0, \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη τη $y=0$.

$$\text{Στο } +\infty, \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} = \beta$$

$$\text{Άρα έχει την } y = \lambda x + \beta = x + \frac{1}{2}.$$

Γ.3 Στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

$$k(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, \text{ στο } [-\pi, 0]$$

$$k(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$$

Η $k(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$

$$\left. \begin{aligned} k(-\pi) &= e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = 0 + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ k(0) &= e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k(-\pi) \cdot k(0) < 0$$

Άρα από Θ. Bolzano θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$, τ.ω. $k(\xi) = 0$

Γ.4

Έχουμε ότι $x'(t) > 0$

Εξετάζουμε αν υπάρχει $t_0 \geq 0$, ώστε $x'(t) = y'(t)$

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \stackrel{x'(t)=y'(t)}{\Rightarrow}$$

$$x'(t) = \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$1 = \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$2\sqrt{x^2(t) + x(t)} = 2x(t) + 1$$

$$4x^2(t) + 4x(t) = 4x^2(t) + 4x(t) + 1$$

$0 = 1$, άρα δεν υπάρχει τέτοια χρονική στιγμή.

ΘΕΜΑ Δ

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

f : παραγωγίσιμη

$$xf(x) = 2F(x) \ln x, x > 0 \quad (1)$$

F παράγουσα της f άρα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$

Η εφαπτομένη της συνάρτησης f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$

άρα $f'(1) = 2$

Δ1.

g παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x} \text{ άρα } (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{x^{\ln x} \cdot \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} \\ &= \frac{x^{\ln x} \cdot (f(x) - F(x) \cdot \frac{\ln x}{x})}{(x^{\ln x})^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{x^{\ln x} \cdot (f(x) - \frac{xf(x)}{x})}{(x^{\ln x})^2} = 0 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι σταθερή επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) = c$ για κάθε $x > 0$.

Δ2.

i. Από τη σχέση (1) για $x=1$ βρίσκουμε $f(1)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

ii.

για $x \neq 1$ από την (1) έχουμε για $F(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x}$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

F συνεχής ως παράγουσα άρα $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1$

$g(x)=c$ για κάθε $x>0$ άρα για $x=1$ βρίσκουμε $c=1$ άρα $g(x)=1$.

$$\text{Άρα } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

Δ3.

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}, x > 0$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	-	ο	+
F	↓		↑

$F \uparrow (0, 1]$ και $F \downarrow [1, +\infty)$

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$$

Παρατηρώ ότι $x=1$ είναι προφανής ρίζα ,

Αν $x > 1$ έχουμε

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 \stackrel{F \uparrow (1, +\infty)}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και } -(x-1)^2 < 0$$

άρα η εξίσωση $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$

Αν $0 < x < 1$ έχουμε

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \stackrel{F \downarrow (0, 1)}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και } -(x-1)^2 < 0$$

άρα η εξίσωση $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ είναι αδύνατη στο $(0, 1)$

Άρα $x=1$ μοναδική ρίζα της ζητούμενης εξίσωσης.

Δ4.

$$x > 1 \stackrel{F \uparrow}{\Rightarrow} F(x) > F(1) \Rightarrow F(x) > 0$$

$$E = \int_1^e |F'(x)| dx = \int_1^e F'(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Ισχύει $e^x \geq x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Θέτουμε στη (2) όπου x το $\ln^2 x$ και έχουμε $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow e^{\ln^2 x} - \ln^2 x + 1 \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

$$\int_1^e (e^{\ln^2 x} - \ln^2 x + 1) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e (e^{\ln^2 x}) dx - \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^e (e^{\ln^2 x}) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E > \int_1^e ((x)' \ln^2 x) dx + \int_1^e 1 dx \Leftrightarrow E > [x \ln^2 x]_1^e - 2 \int_1^e (2 \ln x) dx + [x]_1^e \Leftrightarrow E > e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2 dx \Leftrightarrow$$

$$E > e - 2e + 2e - 2 + e - 1 \Leftrightarrow E > 2e - 3$$