Εξισώσεις Β΄ βαθμού - Τύποι Vieta

Άσκηση 1.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

(α) $x^2 - 16 = 0$

(β) $2x^2 + 1 = 0$

(γ) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(δ) $x^2 + \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) x - \sqrt{10} = 0$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & x^2 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = 16 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

η οποία είναι αδύνατη διότι $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) \\ &= 9 + 72 \\ &= 81 > 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 9}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 9}{4} = -\frac{3}{2}.$$

(δ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\sqrt{10}\right)\\
&= 5+2-2\sqrt{10}+4\sqrt{10}\\
&= 5+2+2\sqrt{10}\\
&= 5+2+2\sqrt{2}\sqrt{5}\\
&= \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}}{2} = \frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) \pm \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{2},$$

ή

$$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{2} = -\sqrt{5}.$$

Άσκηση 2.

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (\lambda-2)\,x - \lambda + 2 = 0 \quad (1)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια διπλή ρίζα.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\lambda-2)^2 - 4\,(-\lambda+2)\\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda - 8\\
&= \lambda^2 - 4.
\end{aligned}$$

Για να έχει η (1) μια διπλή ρίζα πρέπει

$$\begin{aligned}
& \Delta = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2 - 4 = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2 = 4\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2.
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\alpha x^2 - 2\alpha x + \beta = \beta x^2 + 2\beta x + \alpha$$

έχει δύο ρίζες άνισες.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha x^2 - 2\alpha x + \beta = \beta x^2 + 2\beta x + \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha x^2 - \beta x^2 - 2\alpha x - 2\beta x + \beta - \alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha - \beta) x^2 - 2(\alpha + \beta) x + \beta - \alpha = 0. \end{aligned}$$

Αφού $\alpha \neq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha - \beta \neq 0$, έχουμε ότι η εξίσωση είναι Β′ βαθμού. Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta > 0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[-2(\alpha+\beta)\right]^2 - 4(\alpha-\beta)(\beta-\alpha) \\ &= 4(\alpha+\beta)^2 + 4(\alpha-\beta)^2 \\ &= 4\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) + 4\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) \\ &= 4\alpha^2 + 8\alpha\beta + 4\beta^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha\beta + 4\beta^2 \\ &= 8\alpha^2 + 8\beta^2 \\ &= 8\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq 0. \quad (\text{ως άθροισμα μη αρνητικών}) \end{aligned}$$

Όμως, η παράσταση $\alpha^2 + \beta^2$ γίνεται ίση με 0 μόνο όταν $\alpha = \beta = 0$, το οποίο δε μπορεί να συμβεί αφού από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha \neq \beta$. Επομένως,

$$\Delta = 8\left(\alpha^2 + \beta^2\right) > 0$$

κι έτσι δείξαμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Άσκηση 4.

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + 4x - 1 = 0,$$

να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha)\ \ x_1 + x_2, \quad (\beta)\ \ x_1 \cdot x_2, \quad (\gamma)\ \ x_1^2 + x_2^2, \quad (\delta)\ \ x_1^3 + x_2^3$$

$$(\varepsilon)\ \ \frac{3x_1}{x_2} + \frac{3x_2}{x_1}, \quad (\sigma\tau)\ \ (x_1 - x_2)^2, \quad (\zeta)\ \ |x_1 - x_2|.$$

Λύση.

(α) $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{4}{1} = -4.$

(β) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{-1}{1} = -1.$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (-4)^2 - 2\,(-1) \\ &= 16 + 2 = 18. \end{aligned}$$

(δ) Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2\,(x_1 + x_2) \\ &= (-4)^3 - 3(-1)\,(-4) \\ &= -64 - 12 \\ &= -76. \end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι

$$\frac{3x_1}{x_2}+\frac{3x_2}{x_1}=\frac{3x_1^2+3x_2^2}{x_1x_2}=\frac{3\left(x_1^2+x_2^2\right)}{x_1x_2}=\frac{3\cdot 18}{-1}=-54.$$

(στ) Έχουμε ότι

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=18-2(-1)=20.$$

(ζ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|x_1-x_2| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2}\\ &= \sqrt{20}=2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες τις εξίσωσης $x^2+2x-3=0$, με $x_1x_2^3\neq -3$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=x_1^3x_2.$$

Λύση. Αφού x_1, x_2 είναι οι ρίζες τις εξίσωσης $x^2+2x-3=0$, έχουμε ότι

$$x_1+x_2=-2 \qquad \text{και} \qquad x_1x_2=-3.$$

Εστω $x_1^3x_2=\rho_1$ και $x_2^3x_1=\rho_2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\rho_1+\rho_2 &= x_1^3x_2+x_2^3x_1\\ &= x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ &= x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]\\ &= -3\left[(-2)^2-2(-3)\right]\\ &= -30\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\rho_1\cdot\rho_2 &= x_1^3x_2\cdot x_2^3x_1\\ &= (x_1x_2)^4\\ &= (-3)^4=81.\end{aligned}$$

Επομένως, οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 30x + 81 = 0$. Όμως, έχουμε ότι

$$x^2 + 30x + 81 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \ \text{ ή } \ x = -27.$$

Επειδή από την υπόθεση $\rho_2 \neq -3$, προκύπτει αναγκαστικά ότι $\rho_1 = x_1^3 x_2 = -3$.

Άσκηση 6.

Να βρεθούν οι ρίζες των παρακάτω εξισώσεων (χωρίς να λυθούν):

(α) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(β) $2x^2 + 8x + 6 = 0$

(γ) $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) x + \sqrt{6} = 0$

Λύση.

(α) Η εξίσωση έχει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$. Επομένως, οι ρίζες τις θα έχουν γινόμενο $P = 12$ και άθροισμα $S = 7$. Εύκολα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 3 και 4 ικανοποιούν τα παραπάνω. Άρα, οι λύσεις τις εξίσωσεις είναι οι αριθμοί 3 και 4.

(β) Διαιρούμε τον κάθε όρο της εξίσωσης με $\alpha = 2$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 8x + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - (-4)x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, οι ρίζες τις θα έχουν γινόμενο $P = 3$ και άθροισμα $S = -4$. Εύκολα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί -3 και -1 ικανοποιούν τα παραπάνω. Άρα, οι λύσεις τις εξίσωσεις είναι οι αριθμοί -1 και -3.

(γ) Η εξίσωση έχει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$, με

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{και} \quad P = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Άρα, οι λύσεις τις εξίσωσεις είναι οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$.

Άσκηση 7.

Δίνεται η εξίσωση
$$x^2 + (3-\lambda)x - 3\lambda = 0 \quad (1)$$

(α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, για κάθε $\lambda \neq -3$.

(β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δύο ρίζες αντίθετες;

(γ) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δύο ρίζες αντίστροφες;

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Delta &= (3-\lambda)^2 - 4(-3\lambda) \\ &= 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 12\lambda \\ &= \lambda^2 + 6\lambda + 9 \\ &= (\lambda+3)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Αν $\lambda \neq -3$, τότε $\Delta > 0$. Επομένως, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, για κάθε $\lambda \neq -3$.

(β) Για να έχει η εξίσωση (1) αντίθετες ρίζες πρέπει

$$\Delta > 0 \quad \text{και} \quad S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Όμως,
$$-\frac{\beta}{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3-\lambda}{1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3.$$
Άρα, η (1) έχει αντίθετες ρίζες για $\lambda = 3$.

(γ) Για να έχει η εξίσωση (1) αντίστροφες ρίζες πρέπει

$$\Delta > 0 \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Όμως,
$$\frac{\gamma}{\alpha} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3\lambda}{1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3}.$$
Άρα, η (1) έχει αντίστροφες ρίζες για $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Άσκηση 8.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

(β) $\left(x^2+3x+1\right)^2-4\left(x^2+3x+1\right)+3=0$

Λύση. (α) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x \neq 0$.

Θέτουμε $y = x + \dfrac{1}{x}$ (1), οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^2-5y+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2 \quad \text{ή} \quad y=3.$$

- Για $y=2$, η (1) γίνεται

$$x+\frac{1}{x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1=2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1=0.$$

  Όμως,

$$\begin{aligned} & x^2-2x+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x=1. \end{aligned}$$

- Για $y=3$, η (1) γίνεται

$$x+\frac{1}{x}=3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1=3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+1=0.$$

  Η εξίσωση $x^2-3x+1=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1=9-4=5>0.$$

  Άρα,

$$\begin{aligned} & x^2-3x+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ρίζες της εξίσωσης $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$, είναι οι αριθμοί

$$1, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

(β) Θέτουμε $y = x^2 + 3x + 1$ (1), οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \quad \text{ή} \quad y = 3.$$

- Για $y = 1$, η (1) γίνεται

$$x^2 + 3x + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x = 0.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -3. \end{aligned}$$

- Για $y = 3$, η (1) γίνεται

$$x^2 + 3x + 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση $x^2 + 3x - 2 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 3^2 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ρίζες της εξίσωσης $\left(x^2 + 3x + 1\right)^2 - 4\left(x^2 + 3x + 1\right) + 3 = 0$, είναι οι αριθμοί

$$0, \quad -3, \quad \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \quad \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Άσκηση 9.

Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+2)^2 - 2|x+2| - 15 = 0.$$

Λύση. Επειδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha|^2 = \alpha^2$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$|x+2|^2 - 2|x+2| - 15 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $y = |x+2|$ (2), κι έτσι η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Έχουμε ότι

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-15) = 4 + 60 = 64 > 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} & y^2 - 2y - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{2+\sqrt{64}}{2} \quad \text{ή} \quad y = \frac{2-\sqrt{64}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & y = 5 \quad \text{ή} \quad y = -3. \end{aligned}$$

- Για $y = 5$, η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} & |x+2| = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x+2 = 5 \quad \text{ή} \quad x+2 = -5 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -7. \end{aligned}$$

- Για $y = -3$, η (2) γίνεται $|x+2| = -3$, η οποία είναι αδύνατη.

Συνεπώς, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης $(x+2)^2 - 2|x+2| - 15 = 0$, είναι οι αριθμοί 3, -7.

Άσκηση 10.

Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+2)^2 - 2|x+2| - 15 = 0.$$

Λύση. Θέτουμε $(x+1)^2 = y$ (1), κι έτσι η εξίσωση γίνεται

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5 \quad \text{ή} \quad y = -1.$$

- Για $y = 5$, η (1) γίνεται

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4(-4) = 4 + 16 = 20 > 0$, επομένως έχει ρίζες

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}-1$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}.$$

- Για $y = -1$, η (1) γίνεται

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 2 = 0. \end{aligned}$$

  Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$, επομένως είναι αδύνατη.

Συνεπώς, οι ρίζες τις αρχικής εξίσωσης $(x+1)^4 - 4(x+1)^2 - 5 = 0$, είναι οι αριθμοί $\sqrt{5}-1, \quad -1-\sqrt{5}$.