Εξισώσεις Α' βαθμού - Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Άσκηση 1.

Δίνεται η παραμετρική εξίσωση

$$\lambda^2(x+\lambda) = 4x + 2\lambda^2 \quad (1)$$

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1)

(α) να είναι ταυτότητα

(β) να είναι αδύνατη

(γ) να έχει λύση

Λύση. Αρχικά, μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \lambda^2(x+\lambda) = 4x + 2\lambda^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 x + \lambda^3 = 4x + 2\lambda^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 x - 4x = 2\lambda^2 - \lambda^3 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\lambda^2 - 4\right) x = 2\lambda^2 - \lambda^3 \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda-2)(\lambda+2)x = -\lambda^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

(α) Για να είναι η εξίσωση αυτή ταυτότητα, πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{c} (\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \\ -\lambda^2(\lambda-2) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 2 \;\text{ ή }\; \lambda = -2 \\ \lambda = 0 \;\text{ ή }\; \lambda = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

(β) Για να είναι η εξίσωση αδύνατη, πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{c} (\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \\ -\lambda^2(\lambda-2) \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 2 \;\text{ ή }\; \lambda = -2 \\ \lambda \neq 0 \;\text{ και }\; \lambda \neq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

(γ) Η εξίσωση έχει λύση όταν **δεν είναι αδύνατη**. Δηλαδή, σύμφωνα με το ερώτημα (β), πρέπει $\lambda \neq -2$.

Άσκηση 2.

Να λυθεί η εξίσωση
$$x^3 - 3x^2 = 16x - 48.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 = 16x - 48 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2(x-3) - 16(x-3) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-3)(x^2-16) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-3)(x-4)(x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x-3=0 \quad \textbf{ή} \quad x-4=0 \quad \textbf{ή} \quad x+4=0 \\ \Leftrightarrow\quad & x=3 \quad \textbf{ή} \quad x=4 \quad \textbf{ή} \quad x=-4. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Να λυθεί η εξίσωση
$$\frac{3}{x-2} - \frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}.$$

Λύση. Πρέπει

- $x - 2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 2$
- $x^2 - 4 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x+2) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 2$ και $x \neq -2$
- $x + 2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq -2$

Ισοδύναμα, πρέπει $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Οπότε, για $x \neq \pm 2$, η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x-2} - \frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} \\ \Leftrightarrow\quad & (x^2-4)\frac{3}{x-2} - (x^2-4)\frac{3x-2}{x^2-4} = (x^2-4)\frac{1}{x+2} \\ \Leftrightarrow\quad & 3(x+2) - (3x-2) = x-2 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x + 6 - 3x + 2 = x - 2 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 10 \end{aligned}$$

η οποία είναι **δεκτή** διότι ικανοποιεί τους αρχικούς περιορισμούς.

Άσκηση 4.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $4-|x|=0$

(β) $3|x|-9=0$

(γ) $3\left(|x|+2\right)=|x|$

(δ) $2\big(|x|+1\big)+4\big(|x|+|-x|\big)=3+|2x|$

(ε) $|2x+2|-2=0$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$4-|x|=0 \quad\Leftrightarrow\quad |x|=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=4 \ \text{ή}\ x=-4.$$

(β) Έχουμε ότι

$$3|x|-9=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3|x|=9 \quad\Leftrightarrow\quad |x|=3 \quad\Leftrightarrow\quad x=3 \ \text{ή}\ x=-3.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 3\left(|x|+2\right)=|x| \\ \Leftrightarrow\quad & 3|x|+6=|x| \\ \Leftrightarrow\quad & 2|x|=-6 \\ \Leftrightarrow\quad & |x|=-3 \end{aligned}$$

η οποία είναι **αδύνατη**, αφού $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.
(δ) Σύμφωνα με τις ιδιότητες των απολύτων, έχουμε ότι $|-x|=|x|$. Άρα, η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} & 2\big(|x|+1\big)+4\big(|x|+|-x|\big)=3+|2x| \\ \Leftrightarrow\quad & 2|x|+2+4|x|+4|-x|=3+|2x| \\ \Leftrightarrow\quad & 2|x|+2+4|x|+4|x|=3+2|x| \\ \Leftrightarrow\quad & 2|x|+4|x|+4|x|-2|x|=3-2 \\ \Leftrightarrow\quad & 8|x|=1 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{1}{8} \quad \textbf{ή} \quad x=-\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& |2x+2|-2=0 \\
\Leftrightarrow\quad & |2x+2|=2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+2=2 \quad \text{ή} \quad 2x+2=-2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x=0 \quad \text{ή} \quad 2x=-4 \\
\Leftrightarrow\quad & x=0 \quad \text{ή} \quad x=-2.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $2-\dfrac{|x|-1}{3}=\dfrac{2|x|-1}{9}+|x|$

(β) $1-\dfrac{|4x-6|-2}{4}=\dfrac{1+|3-2x|}{2}-2$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& 2-\frac{|x|-1}{3}=\frac{2|x|-1}{9}+|x| \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cdot 9-9\frac{|x|-1}{3}=9\frac{2|x|-1}{9}+9|x| \\
\Leftrightarrow\quad & 18-3\left(|x|-1\right)=2|x|-1+9|x| \\
\Leftrightarrow\quad & 18-3|x|+3=2|x|-1+9|x| \\
\\
\Leftrightarrow\quad & -3|x|-2|x|-9|x|=-1-18-3 \\
\Leftrightarrow\quad & -14|x|=-22 \\
\Leftrightarrow\quad & |x|=\frac{11}{7} \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{11}{7} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{11}{7}.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& 1-\frac{|4x-6|-2}{4}=\frac{1+|3-2x|}{2}-2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\cdot 1-4\frac{|4x-6|-2}{4}=4\frac{1+|3-2x|}{2}-2\cdot 4 \\
\Leftrightarrow\quad & 4-(|4x-6|-2)=2\left(1+|3-2x|\right)-8 \\
\Leftrightarrow\quad & 4-|4x-6|+2=2+2|3-2x|-8 \\
\Leftrightarrow\quad & 4-|2(2x-3)|+2=2+2|3-2x|-8 \\
\Leftrightarrow\quad & 4-2|2x-3|+2=2+2|3-2x|-8 \\
\Leftrightarrow\quad & 4-2|3-2x|+2=2+2|3-2x|-8 \\
\Leftrightarrow\quad & -2|3-2x|-2|3-2x|=2-8-4-2 \\
\Leftrightarrow\quad & -4|3-2x|=-12 \\
\Leftrightarrow\quad & |3-2x|=3 \\
\Leftrightarrow\quad & 3-2x=3 \quad \text{ή} \quad 3-2x=-3 \\
\Leftrightarrow\quad & x=0 \quad \text{ή} \quad x=3.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 6.

Να λυθεί η εξίσωση

$$|x-3|=\sqrt{x^2-2x+1}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& |x-3|=\sqrt{x^2-2x+1} \\
\Leftrightarrow\quad & |x-3|=\sqrt{(x-1)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & |x-3|=|x-1| \\
\Leftrightarrow\quad & x-3=x-1 \quad \text{ή} \quad x-3=-x+1 \\
\Leftrightarrow\quad & 0x=2 \ (\text{αδύνατη}) \quad \text{ή} \quad 2x=4 \\
\Leftrightarrow\quad & x=2.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7.

Να λυθεί η εξίσωση
$$|2x-1| = 3x-9.$$

Λύση. Επειδή $|2x-1| \geq 0$, πρέπει $3x-9 \geq 0 \iff x \geq 3$.

Άρα, για $x \geq 3$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & |2x-1| = 3x-9 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x-1 = 3x-9 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -3x+9 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 8 \quad \text{ή} \quad 5x = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 8 \quad \text{ή} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Όμως, η λύση $x = 2$ δεν ικανοποιεί τον αρχικό περιορισμό κι έτσι απορρίπτεται. Συνεπώς, η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 8$.

Άσκηση 8.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\big|3-|x-3|\big| = 2$

(β) $\big|1+|2x+1|\big| = 1$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \big|3-|x-3|\big| = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3-|x-3| = 2 \quad \text{ή} \quad 3-|x-3| = -2 \\ \Leftrightarrow \quad & |x-3| = 1 \quad \text{ή} \quad |x-3| = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x-3 = 1 \quad \text{ή} \quad x-3 = -1 \quad \text{ή} \quad x-3 = 5 \quad \text{ή} \quad x-3 = -5 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 8 \quad \text{ή} \quad x = -2. \end{aligned}$$

(β) Αφού $1+|2x+1| > 0$, έχουμε ότι $\big|1+|2x+1|\big| = 1+|2x+1|$. Έτσι, η εξίσωση γίνεται

$$
\begin{aligned}
& \big|1+|2x+1|\big| = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 1+|2x+1| = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |2x+1| = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 9.

Να λυθεί η εξίσωση
$$|(x-1)(x-2)| = |x-1|.$$

Λύση. Έχουμε ότι
$$
\begin{aligned}
& |(x-1)(x-2)| = |x-1| \\
\Leftrightarrow\quad & |x-1|\cdot|x-2| = |x-1| \\
\Leftrightarrow\quad & |x-1|\cdot|x-2| - |x-1| = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & |x-1|\big(|x-2|-1\big) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & |x-1| = 0 \quad \text{ή} \quad |x-2|-1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad |x-2| = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 1 \quad \text{ή} \quad x-2 = 1 \quad \text{ή} \quad x-2 = -1 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 10.

Να λυθεί η εξίσωση
$$|x-2| + |2-x| + |x-1| = 2+x.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & |x-2|+|2-x|+|x-1|=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & |x-2|+|x-2|+|x-1|=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & 2|x-2|+|x-1|=2+x \qquad (1) \end{aligned}$$

Κάνουμε τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x-2	-		-	0	+
x-1	-	0	+		+

Στη συνέχεια, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 1$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$\begin{aligned} & 2|x-2|+|x-1|=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & 2(-x+2)-x+1=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & -2x+4-x+1=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & -4x=-3 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

  η οποία είναι **δεκτή** διότι $\frac{3}{4} \leq 1$.

- Αν $1 < x \leq 2$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$\begin{aligned} & 2|x-2|+|x-1|=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & 2(-x+2)+x-1=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & -2x+4+x-1=2+x \\ \Leftrightarrow\quad & -2x=-1 \\ \Leftrightarrow\quad & x=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

  η οποία **απορρίπτεται** διότι $\frac{1}{2} \notin (1,2]$

- Αν $x > 2$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$
\begin{aligned}
& 2|x-2| + |x-1| = 2 + x \\
\Leftrightarrow \quad & 2(x-2) + x - 1 = 2 + x \\
\Leftrightarrow \quad & 2x - 4 + x - 1 = 2 + x \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = 7 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

  η οποία είναι **δεκτή** διότι $\frac{7}{2} > 2$.

Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = \frac{3}{4}$, $x = \frac{7}{2}$.

Άσκηση 11.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\big||x-2|+2\big| = \big||x-1|-3\big|.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι $|x-2|+2 > 0$. Οπότε, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& \big||x-2|+2\big| = \big||x-1|-3\big| \\
\Leftrightarrow \quad & |x-2|+2 = \big||x-1|-3\big| \\
\Leftrightarrow \quad & \big||x-1|-3\big| = |x-2|+2 \\
\Leftrightarrow \quad & |x-1|-3 = |x-2|+2 \quad \textbf{ή} \quad |x-1|-3 = -|x-2|-2 \\
\Leftrightarrow \quad & |x-1|-|x-2| = 5 \;\; (1) \quad \textbf{ή} \quad |x-1|+|x-2| = 1 \;\; (2)
\end{aligned}
$$

Για την εξίσωση (1), κάνουμε τον πίνακα προσήμου

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x-2	-		-	0	+
x-1	-	0	+		+

και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad -x+1-(-x+2)=5 \\ &\Leftrightarrow \quad -x+1+x-2=5 \\ &\Leftrightarrow \quad 0x=6 \end{aligned}$$

η οποία είναι **αδύνατη**.

- Αν $1 < x \leq 2$, τότε

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad x-1-(-x+2)=5 \\ &\Leftrightarrow \quad x-1+x-2=5 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x=8 \\ &\Leftrightarrow \quad x=4 \end{aligned}$$

η οποία **απορρίπτεται**, διότι $4 \notin (1.2]$.

- Αν $x > 2$, τότε

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad x-1-(x-2)=5 \\ &\Leftrightarrow \quad x-1-x+2=5 \\ &\Leftrightarrow \quad 0x=4 \end{aligned}$$

η οποία είναι **αδύνατη**.

Για την εξίσωση (2), έχουμε ότι

- Αν $x \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-1)-x+2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad -x+1-x+2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x=-2 \\ &\Leftrightarrow \quad x=1 \end{aligned}$$

η οποία είναι **δεκτή**. διότι $1 \leq 1$

- Αν $1 < x \leq 2$, τότε

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Leftrightarrow \quad x-1-x+2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0x=0 \end{aligned}$$

η οποία είναι **ταυτότητα**.

- Αν $x > 2$, τότε

$$\begin{aligned} (2) \quad \Leftrightarrow \quad & x - 1 + x - 2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 \end{aligned}$$

η οποία **απορρίπτεται**, διότι $2 \notin (2. + \infty)$.

Άρα, οι λύσεις τις αρχικής εξίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί $x \in [1, 2]$.

Άσκηση 12.

Να λυθοούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 = 3$

(β) $x^8 = -3$

(γ) $x^5 = \sqrt{2}$

(δ) $x^3 = -\sqrt[5]{3}$

Λύση. (α) Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή $x^\nu = \alpha$, με $\alpha = 3 > 0$ και $\nu = 4$ (άρτιος). Άρα, έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \sqrt[4]{3}$ και $x_2 = -\sqrt[4]{3}$. Δηλαδή,

$$x^4 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[4]{3} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt[4]{3}.$$

(β) Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή $x^\nu = \alpha$, με $\alpha = -3 < 0$ και $\nu = 8$ (άρτιος). Επομένως, η εξίσωση $x^8 = -3$ είναι **αδύνατη**.

(γ) Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή $x^\nu = \alpha$, με $\alpha = \sqrt{2} > 0$ και $\nu = 5$ (περιττός). Επομένως, έχει μοναδική λύση, τη

$$x = \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2}.$$

(δ) Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή $x^\nu = \alpha$, με $\alpha = -\sqrt[5]{3} < 0$ και $\nu = 3$ (περιττός). Επομένως, έχει ακριβώς μία λύση, τη

$$x = -\sqrt[3]{|-\sqrt[5]{3}|} = -\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}} = -\sqrt[15]{3}.$$

Άσκηση 13.

Να λυθοούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $1 - 16x^4 = 0$

(β) $3x^6 + 5 = 0$

(γ) $27x^3 + 8 = 0$

(δ) $32x^5 - 243 = 0$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 1 - 16x^4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 16x^4 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^4 = \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & x^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι $3x^6 + 5 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^6 = -\frac{5}{3}$, η οποία είναι αδύνατη.

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 27x^3 + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 27x^3 = -8 \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 = -\frac{8}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & x^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& 32x^5 - 243 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 32x^5 = 243 \\
\Leftrightarrow \quad & x^5 = \frac{243}{32} \\
\Leftrightarrow \quad & x^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 14.

Να λυθοούν οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $x^7 - 3x = 0$

(β) $3x^5 + 4x^2 = 0$

(γ) $(x-1)^8 - 256 = 0$

(δ) $(3x-1)^3 + 125 = 0$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
x^7 - 3x = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x(x^6 - 3) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x^6 = 3 \\
& \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt[6]{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[6]{3}.
\end{aligned}
$$

(β) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
3x^5 + 4x^2 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2(3x^3 + 4) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x^3 + 4 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -\frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}
$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (x-1)^8 - 256 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^8 = 256 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = \sqrt[8]{256} \quad \text{ή} \quad x - 1 = -\sqrt[8]{256} \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = 2 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1. \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (3x-1)^3 + 125 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (3x-1)^3 = -125 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 1 = -\sqrt[3]{125} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 1 = -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Άσκηση 15.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

(α) $3 - (x-2)^8 = \lambda$

(β) $(x+1)^5 - \lambda = 2$

Λύση. (α) Η εξίσωση αυτή γίνεται

$$(x-2)^8 = 3 - \lambda.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $3 - \lambda < 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda > 3$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη (διότι ο εκθέτης είναι άρτιος).
- Αν $3 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 3$, τότε

$$(x-2)^8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

- Αν $3 - \lambda > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda < 3$, τότε

$$\begin{aligned} &(x-2)^8 = 3 - \lambda \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2 = \sqrt[8]{3-\lambda} \quad \text{ή} \quad x - 2 = -\sqrt[8]{3-\lambda} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 + \sqrt[8]{3-\lambda} \quad \text{ή} \quad x = 2 - \sqrt[8]{3-\lambda}. \end{aligned}$$

(β) Η εξίσωση αυτή γίνεται

$$(x+1)^5 = 2+\lambda.$$

Επειδή ο εκθετης της δύναμης $(x+1)^5$ είναι περιττός, η εξίσωση αυτή έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (και μάλιστα μοναδική). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $2+\lambda \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in [-2, +\infty)$, τότε

$$\begin{aligned} & (x+1)^5 = 2+\lambda \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 = \sqrt[5]{2+\lambda} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \sqrt[5]{2+\lambda} - 1. \end{aligned}$$

- Αν $2+\lambda < 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in (-\infty, -2)$, τότε

$$\begin{aligned} & (x+1)^5 = 2+\lambda \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 = -\sqrt[5]{-(2+\lambda)} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -\sqrt[5]{-2-\lambda} - 1. \end{aligned}$$