Απόλυτη τιμή - Ρίζες πραγματικών αριθμών

Άσκηση 1.

Αν $-2 < \alpha < 3$, να απλοποιηθεί η παράσταση
$A = |\alpha + 2| + |\alpha - 3| + |\alpha + 4| + |\alpha - 5|$.

Λύση. Έχουμε ότι

- $-2 < \alpha \Rightarrow \alpha + 2 > 0$. Άρα, $|\alpha + 2| = \alpha + 2$.
- $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha - 3 < 0$. Άρα, $|\alpha - 3| = -(\alpha - 3) = -\alpha + 3$.
- $-2 < \alpha$ και $-4 < -2$, οπότε $-4 < \alpha \Rightarrow \alpha + 4 > 0$. Άρα, $|\alpha + 4| = \alpha + 4$.
- $\alpha < 3$ και $3 < 5$, οπότε $\alpha < 5 \Rightarrow \alpha - 5 < 0$. Άρα, $|\alpha - 5| = -(\alpha - 5) = -\alpha + 5$.

Συνεπώς, η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} A &= |\alpha + 2| + |\alpha - 3| + |\alpha + 4| + |\alpha - 5| \\ &= \alpha + 2 - \alpha + 3 + \alpha + 4 - \alpha + 5 \\ &= 14. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Αν $-1 < x < 4$, να δειχθεί ότι

$$\big|5 - |x - 4|\big| = x + 1.$$

Λύση. Αφού $x < 4$, έχουμε ότι $x - 4 < 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \big|5 - |x - 4|\big| &= \big|5 - [-(x - 4)]\big| \\ &= \big|5 - (-x + 4)\big| \\ &= |5 + x - 4| \\ &= |x + 1| \\ &= x + 1 \quad (\text{διότι } -1 < x \Rightarrow x + 1 > 0). \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

(α) $A = x^2 + 2|x - 1|$

(β) $B = |2x - 4| + 3x$

(γ) $\Gamma = |x^2 + 1| + |x^2 - 2x + 1| - x$

(δ) $\Delta = |x + 1| + |x + 2| + |2x - 6|$

Λύση. Σε οριμένες ασκήσεις που δεν έχουμε περιορισμούς για την παράμετρο x, για να βγάλουμε τα απόλυτα πρέπει αναγκαστικά να διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Έχουμε ότι

- Αν $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, τότε η παράσταση γίνεται

$$A = x^2 + 2(x - 1) = x^2 + +2x - 2.$$

- Αν $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, τότε η παράσταση γίνεται

$$A = x^2 + 2[-(x - 1)] = x^2 + 2(-x + 1) = x^2 - 2x + 2.$$

Συνεπώς, η παράσταση A γράφεται ως

$$A = \begin{cases} x^2 + 2x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{αν } x < 1 \end{cases}.$$

(β) Έχουμε ότι

- Αν $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, τότε η παράσταση γίνεται

$$B = |2x - 4| + 3x = 2x - 4 + 3x = 5x - 4.$$

- Αν $2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, τότε η παράσταση γίνεται

$$B = |2x - 4| + 3x = -(2x - 4) + 3x = -2x + 4 + 3x = x + 4.$$

Συνεπώς, η παράσταση A γράφεται ως

$$B = \begin{cases} 5x - 4, & \text{αν } x \geq 2 \\ x + 4, & \text{αν } x < 2 \end{cases}.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι

- $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ως άθροισμα θετικών αριθμών), και
- $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ως τετράγωνο αριθμού).

Οπότε, η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} \Gamma &= |x^2+1| + |x^2-2x+1| - x \\ &= x^2+1+x^2-2x+1-x \\ &= 2x^2-3x+2. \end{aligned}$$

(δ) Η παράσταση $\Delta = |x+1| + |x+2| + |2x-6|$, περιέχει παραπάνω από μία απόλυτη τιμή. Σε αυτές τις περιπτώσεις βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της κάθε παράστασης που βρίσκεται μέσα σε απόλυτο:

- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Επίσης, ισχύει ότι

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \quad \text{και} \quad x+1<0 \Leftrightarrow x<-1.$$

- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Επίσης, ισχύει ότι

$$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2 \quad \text{και} \quad x+2<0 \Leftrightarrow x<-2.$$

- $2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$. Επίσης, ισχύει ότι

$$2x-6>0 \Leftrightarrow x>3 \quad \text{και} \quad 2x-6<0 \Leftrightarrow x<3.$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σε υποδιαστήματα (κάνοντας πίνακα τιμών):

x	-∞	-2		-1		3	+∞
x+1	-		-	0	+		+
x+2	-	0	+		+		+
2x-6	-		-		-	0	+

Οπότε,

- Αν $x \in (-\infty, -2]$, τότε

$$\begin{aligned} \Delta &= |x+1| + |x+2| + |2x-6| \\ &= -(x+1) - (x+2) - (2x-6) \\ &= -x-1-x-2-2x+6 = -4x+3. \end{aligned}$$

- Αν $x \in (-2, -1]$, τότε

$$\begin{aligned} \Delta &= |x+1| + |x+2| + |2x-6| \\ &= -(x+1) + (x+2) - (2x-6) \\ &= -x-1+x+2-2x+6 = -2x+7. \end{aligned}$$

- Αν $x \in (-1, 3]$, τότε

$$\begin{aligned}\Delta &= |x+1| + |x+2| + |2x-6| \\ &= x+1+(x+2)-(2x-6) \\ &= x+1+x+2-2x+6 = 9.\end{aligned}$$

- Αν $x \in (3, +\infty]$, τότε

$$\begin{aligned}\Delta &= |x+1| + |x+2| + |2x-6| \\ &= x+1+x+2+2x-6 \\ &= 4x-3.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η παράσταση γίνεται

$$\Delta = \begin{cases} -4x+3, & \text{αν} \quad x \leq -2 \\ -2x+7, & \text{αν} \quad -2 < x \leq -1 \\ 9, & \text{αν} \quad -1 < x \leq 3 \\ 4x-3, & \text{αν} \quad x > 3 \end{cases}.$$

Άσκηση 4.

Έστω x, y τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου. Αν $|x-1| < 0,5$ και $|y-5| < 2,5$, να εκτιμήσετε τη τιμή της περιμέτρου του.

Λύση. Η περίμετρος του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση

$$\Pi = 2x + 2y.$$

Επίσης, έχουμε ότι

- $|x-1| < 0,5 \quad \Rightarrow \quad -0,5 < x-1 < 0,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5 < x < 1,5$ (1)
- $|y-5| < 2,5 \quad \Rightarrow \quad -2,5 < y-5 < 2,5 \quad \Rightarrow \quad 2,5 < y < 7,5$ (2)

Προσθέτοντας τις ανισότητες (1) και (2) κατά μελη, προκύπτει ότι

$$3 < x + y < 9 \quad (3).$$

Τέλος, πολλαπασιάζουμε κάθε μέλος της ανισότητας (3) με το $2 > 0$, και παίρνουμε ότι

$$6 < 2(x+y) < 18$$

ή

$$6 < \Pi < 18.$$

Άρα, η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι μεταξύ του 6 και του 18.

Άσκηση 5.

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

Απολυτη Τιμη	Αποσταση	Διαστημα Ή Ενωση Διαστηματων
$\lvert x-1\rvert \leq 2$	$\mathrm{d}(x,1) \leq 2$	$[-1,3]$
	$\mathrm{d}(x,4) > 1$	
$\lvert x+1\rvert < 5$		
		$[-4,2]$
		$(-\infty,-4] \cup [6,+\infty)$

Λύση. Έχουμε τα εξής:

- $$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,4) > 1 &\Leftrightarrow |x-4| > 1 \\ &\Leftrightarrow x-4>1 \text{ ή } x-4<-1 \\ &\Leftrightarrow x>5 \text{ ή } x<3 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty,3) \cup (5,+\infty). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |x+1| < 5 &\Leftrightarrow |x-(-1)| < 5 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}(x,-1) < 5 \\ &\Leftrightarrow -5 < x+1 < 5 \\ &\Leftrightarrow -6 < x < 4 \\ &\Leftrightarrow x \in (-6,4). \end{aligned}$$

- Το διάστημα $[-4,2]$ έχει κέντρο $x_0 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{2-(-4)}{2} = 3$. Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in [-4,2] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\,(x,-1) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad |x+1| \leq 3. \end{aligned}$$

- Το διάστημα $[-4,6]$ έχει κέντρο $x_0 = \dfrac{-4+6}{2} = 1$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{6-(-4)}{2} = 5$. Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in (-\infty,-4] \cup [6,+\infty) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\,(x,1) \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-1| \geq 5. \end{aligned}$$

Επομένως, ο πίνακας γίνεται

Απολυτη Τιμη	Αποσταση	Διαστημα Ή Ενωση Διαστηματων
$\lvert x-1\rvert \leq 2$	$\mathrm{d}(x,1) \leq 2$	$[-1,3]$
$\lvert x-4\rvert > 1$	$\mathrm{d}(x,4) > 1$	$(-\infty,3) \cup (5,+\infty)$
$\lvert x+1\rvert < 5$	$\mathrm{d}(x,-1) < 5$	$(-6,4)$
$\lvert x+1\rvert \leq 3$	$\mathrm{d}(x,-1) \leq 3$	$[-4,2]$
$\lvert x-1\rvert \geq 5$	$\mathrm{d}(x,1) \geq 5$	$(-\infty,-4] \cup [6,+\infty)$

Άσκηση 6.

Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$. Για ποιούς αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

(α) $\left| x - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \right| = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

(β) $\left| x - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \right| < \dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

(γ) $\left| x - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \right| > \dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

Λύση. (α): Δίακρίνουνε δύο περιπτώσεις. Αν $x > \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, τότε

$$
\begin{aligned}
& \left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\alpha+\beta+\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \beta.
\end{aligned}
$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, τότε

$$
\begin{aligned}
& \left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -x + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\alpha+\beta-\beta+\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \alpha.
\end{aligned}
$$

Άρα, $\left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| = \frac{\beta-\alpha}{2}$ αν και μόνο αν $x = \alpha$ ή $x = \beta$.

(β): Διακρίνοντας τις ίδιες περιπτώσεις, καταλήγουμε στο ότι $\left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| < \frac{\beta-\alpha}{2}$ αν και μόνο αν $\alpha < x < \beta$ (δηλαδή $x \in (\alpha, \beta)$). Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση.

(γ): Διακρίνοντας για ακόμη μια φορά τις ίδιες περιπτώσεις, καταλήγουμε στο ότι $\left|x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| > \frac{\beta-\alpha}{2}$ αν και μόνο αν $x < \alpha$ ή $x > \beta$ (δηλαδή $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$). Οι λεπτομέρειες αφήνονται κι αυτές σαν άσκηση.

Άσκηση 7.

Αν $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$ και $|\gamma| = 4$, να δειχθεί ότι

$$|\alpha - \beta + \gamma| < 10.$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα και έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\alpha-\beta+\gamma| &= \big|(\alpha-\beta)+\gamma\big| \\ &\leq |\alpha-\beta|+|\gamma| \\ &\leq |\alpha|+|\beta|+|\gamma| \\ &= 2+3+4 \\ &= 9 \\ &< 10. \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

Αν $|x| \leq 1$, να δειχθεί ότι

$$|4x^4-3x^3+2x^2-x+5| \leq 15.$$

Λύση. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |4x^4-3x^3+2x^2-x+5| &\leq |4x^4|+|-3x^3|+|2x^2|+|-x|+|5| \\ &= 4|x|^4+3|x|^3+2|x|^2+|x|+5 \qquad (1) \end{aligned}$$

Όμως, αφού $|x| \leq 1$, έπεται ότι

- $|x|^4 \leq 1 \;\Rightarrow\; 4|x|^4 \leq 4$
- $|x|^3 \leq 1 \;\Rightarrow\; 3|x|^3 \leq 3$
- $|x|^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 2|x|^2 \leq 2$

Άρα,

$$4|x|^4+3|x|^3+2|x|^2+|x|+5 \leq 4+3+2+1+5 = 15.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$|4x^4-3x^3+2x^2-x+5| \leq 15.$$

Άσκηση 9.

(α) Να δειχθεί ότι $|\alpha+\beta| \leq |\alpha+\gamma|+|\beta-\gamma|$, για κάθε $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $|x+1| \leq 5$ και $|y-2| \leq 7$, να δειχθεί ότι $|x-y+3| \leq 12$.

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta| &= |\alpha+\gamma-\gamma+\beta| \\ &= \big|(\alpha+\gamma)+(\beta-\gamma)\big| \\ &\le |\alpha+\gamma|+|\beta-\gamma|.\end{aligned}$$

(β)Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|x-y+3| &= |x-y+1+2| \\ &= |x+1-y+2| \\ &= \big|x+1-(y-2)\big| \\ &\le |x+1|+|y-2| \\ &\le 5+7=12.\end{aligned}$$

Άσκηση 10.

Αν $|2\alpha+3\beta|<|3\alpha+2\beta|$, να δειχθεί ότι $|\alpha|>|\beta|$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & |2\alpha+3\beta|<|3\alpha+2\beta| \\ \Leftrightarrow\ & |2\alpha+3\beta|^2<|3\alpha+2\beta|^2 \\ \Leftrightarrow\ & (2\alpha+3\beta)^2<(3\alpha+2\beta)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4\alpha^2+12\alpha\beta+9\beta^2<9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & 4\alpha^2+9\beta^2<9\alpha^2+4\beta^2 \\ \Leftrightarrow\ & 5\beta^2<5\alpha^2 \\ \Leftrightarrow\ & \beta^2<\alpha^2 \\ \Leftrightarrow\ & |\beta|^2<|\alpha|^2 \\ \Leftrightarrow\ & |\beta|<|\alpha| \quad (\text{αφού } |\alpha|,|\beta|\ge 0). \end{aligned}$$

Άσκηση 11.

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

(α) $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{4}}$

(β) $B = \sqrt{24} - \sqrt{45} + \sqrt{54} + \sqrt{20}$

(γ) $\Gamma = \sqrt{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{\frac{21}{6}} + \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}}{\sqrt{15}}$

(δ) $\Delta = \sqrt{16 + \sqrt{60}}$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{5 + 2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} \\ &= 3. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{24} - \sqrt{45} + \sqrt{54} + \sqrt{20} \\ &= \sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 5} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 2\sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{6} - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{\frac{21}{6}} + \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{6}{7} \cdot \frac{21}{6}} + \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}}{\sqrt{15}} \\ &= \sqrt{\frac{21}{7}} + \frac{\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{3 \cdot 5}} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt{7})^2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{3} + (\sqrt{7})^2 = 7 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{16+\sqrt{60}} = \sqrt{16+\sqrt{4\cdot 15}} \\
&= \sqrt{16+\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}} = \sqrt{16+2\sqrt{15}} \\
&= \sqrt{15+2\sqrt{15}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{15}+1\right)^2} \\
&= |\sqrt{15}+1| = \sqrt{15}+1.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 12.

Να τραπούν οι παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρανομαστές:

(α) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ (β) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-2}$ (γ) $\dfrac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ (δ) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2}}$

Λύση.

(α) Έχουμε ότι

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

(β) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{3}-2} &= \frac{4\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)} \\
&= \frac{4\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2} = \frac{4\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4} \\
&= -4\left(\sqrt{3}+2\right).
\end{aligned}
$$

(γ) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} &= \frac{10\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)} \\
&= \frac{10\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} \\
&= -5\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right).
\end{aligned}
$$

(δ) Σε αυτές τις περιπτώσεις θέλουμε να φέρουμε τον παρανομαστή στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$, οπότε πολλαπλασιάζουμε με τη κατάλληλη ρίζα τον αριθμητή και του παρανομαστή του κλάσματος. Έχουμε ότι

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2 \cdot 2^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{2}.$$

Άσκηση 13.

Αν x είναι ρητός, να τραπούν οι παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες, με ρητό παρανομαστή:

(α) $\dfrac{2+3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

(β) $\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2+3}+1}$

(γ) $\dfrac{2}{\sqrt{9x^2+5}-3x+2}$

(δ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$

(ε) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{7}}$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{2+3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}} &= \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{5}+6\sqrt{15}+9(\sqrt{5})^2}{(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{5}+6\sqrt{15}+45}{12-45} \\
&= -\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{5}+6\sqrt{15}+45}{33}.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{2-x}{\sqrt{x^2+5}+1} &= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{(\sqrt{x^2+5}+1)(\sqrt{x^2+5}-1)}\\
&= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{(\sqrt{x^2+5})^2-1^2}\\
&= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{|x^2+5|-1^2}\\
&= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{x^2+5-1}\\
&= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{x^2-4}\\
&= \frac{(2-x)(\sqrt{x^2+5}-1)}{(x-2)(x+2)}\\
&= -\frac{\sqrt{x^2+5}-1}{x+2}.
\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}-3x+2} &= \frac{2}{\sqrt{9x^2+5}-(3x-2)}\\
&= \frac{2\big(\sqrt{9x^2+5}+(3x-2)\big)}{\big(\sqrt{9x^2+5}-(3x-2)\big)\big(\sqrt{9x^2+5}+(3x-2)\big)}\\
&= \frac{2\big(\sqrt{9x^2+5}+(3x-2)\big)}{\big(\sqrt{9x^2+5}\big)^2-(3x-2)^2}\\
&= \frac{2\big(\sqrt{9x^2+5}+(3x-2)\big)}{9x^2+5-9x^2+12x-4}\\
&= \frac{2\sqrt{9x^2+5}+6x-4}{12x+1}.
\end{aligned}$$

(δ) Στη περίπτωση που έχουμε τρίτες ρίζες στον παρανομαστή, κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)}$$

και

$$\boxed{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}$$

Δηλαδή, αν έχουμε μια παράσταση της μορφής $\frac{\gamma}{\sqrt[3]{\alpha}\pm\sqrt[3]{\beta}}$, τότε πολλαπλάσιάζουμε με $(\sqrt[3]{\alpha})^2\mp\sqrt[3]{\alpha\beta}+(\sqrt[3]{\beta})^2$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} &= \frac{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}+1)\left[(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1\right]}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}\\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}.\end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{7}} &= \frac{3\left[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{7}+(\sqrt[3]{7})^2\right]}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{7})\left[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{7}+(\sqrt[3]{7})^2\right]}\\ &= \frac{3\left[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{7}+(\sqrt[3]{7})^2\right]}{(\sqrt[3]{2})^3-(\sqrt[3]{7})^3}\\ &= \frac{3\left[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{7}+(\sqrt[3]{7})^2\right]}{2-7}\\ &= -\frac{3\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7^2}\right)}{5}.\end{aligned}$$

Άσκηση 14.

Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, να δειχθεί ότι

(α) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$,

(β) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta}$.

Λύση. (α) Επειδή $\alpha, \beta \geq 0$, έχουμε ότι $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ και $\beta = \sqrt[\nu]{\beta^\nu}$. Επίσης, αν $x, y \geq 0$, τότε ισχύει ότι $x < y \Leftrightarrow x^\nu < y^\nu$. Σύμφωνα με αυτές τις παρατηρήσεις, έχουμε ότι

$$\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} < \sqrt[\nu]{\beta^\nu} \;\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu < (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu \;\Leftrightarrow\; \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}.$$

(β) Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται σαν άσκηση.

Άσκηση 15.

Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{42}\cdot\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[5]{48} = \sqrt[10]{6^7}\cdot\sqrt[6]{7^5}\cdot\sqrt[15]{2^{14}}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt{42}\cdot\sqrt[3]{14}\cdot\sqrt[5]{48} &= 42^{\frac{1}{2}}\cdot 14^{\frac{1}{3}}\cdot 48^{\frac{1}{5}}\\
&= (6\cdot 7)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 7)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(6\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{5}}\\
&= 6^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}\\
&= 6^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{5}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{5}}\\
&= 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}\cdot 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}\\
&= 6^{\frac{7}{10}}\cdot 7^{\frac{5}{6}}\cdot 2^{\frac{14}{15}}\\
&= \sqrt[10]{6^7}\cdot\sqrt[6]{7^5}\cdot\sqrt[15]{2^{14}}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 16.

Έστω $x = \sqrt{10+3\sqrt{5}} - \sqrt{10-3\sqrt{5}}$.

(α) Να δειχθεί ότι $x > 0$

(β) Να δειχθεί ότι $x = 20 - 2\sqrt{55}$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \sqrt{10+3\sqrt{5}} - \sqrt{10-3\sqrt{5}} > 0\\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{10+3\sqrt{5}} > \sqrt{10-3\sqrt{5}}\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\sqrt{10+3\sqrt{5}}\right)^2 > \left(\sqrt{10-3\sqrt{5}}\right)^2 \qquad \text{(και τα δύο μέλη είναι θετικά)}\\
\Leftrightarrow\quad & 10+3\sqrt{5} > 10-3\sqrt{5} \qquad (\text{αφού }\ 10-3\sqrt{5} > 0)\\
\Leftrightarrow\quad & 3\sqrt{5} > -3\sqrt{5}\\
\Leftrightarrow\quad & 3 > -3,
\end{aligned}$$

που ισχύει. Άρα, $x > 0$.

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(\sqrt{10+3\sqrt{5}} - \sqrt{10-3\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{10+3\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{10+3\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10-3\sqrt{5}} + \left(\sqrt{10-3\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= 10+3\sqrt{5} - 2\sqrt{\left(10+3\sqrt{5}\right)\left(10-3\sqrt{5}\right)} + 10 - 3\sqrt{5} \\
&= 20 - 2\sqrt{10^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^2} \\
&= 20 - 2\sqrt{100-45} \\
&= 20 - 2\sqrt{55}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 17.

Αν α, $\beta > 0$, να δειχθεί ότι

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha+\beta \\
\Leftrightarrow \quad & \left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \leq (\alpha+\beta) \quad \text{(και τα δύο μέλη είναι θετικά)} \\
\Leftrightarrow \quad & 4\alpha\beta \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\alpha-\beta)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Άσκηση 18.

Δίνεται η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt[5]{x^5}}{x}+\frac{\sqrt[4]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[4]{x^2+4x+4}}{x+2}.$$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση;

(β) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

Λύση.
(α) Πρέπει:

- $x^5\geq 0$,
- $x^2+4x+4\geq 0$ (που ισχύει διότι $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$),
- $x\neq 0$ και $x+2\neq 0$.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για $x>0$. Επομένως, η παράσταση A ορίζεται για x θετικά.

(β) Εφόσον $x>0$, έχουμε ότι $\sqrt[5]{x^5}=x$. Επίσης, έχουμε ότι

$$\sqrt[4]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[4]{x^2+4x+4}=\sqrt[4]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^2}=\sqrt[4]{(x+2)^4}=|x+2|.$$

Επειδή όμως $x>0$, έχουμε ότι $|x+2|=x+2$. Συνεπώς, η παράσταση A παίρνει τη μορφή

$$A=\frac{x}{x}+\frac{x+2}{x+2}=2$$

Άσκηση 19.

Αν $\alpha,\ \beta>0$, να δειχθεί ότι

$$\frac{7\alpha-12\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{3\alpha}+3\sqrt{\beta}}\geq\sqrt{3\alpha}-3\sqrt{\beta}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& \frac{7\alpha - 12\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{3\alpha} + 3\sqrt{\beta}} \geq \sqrt{3\alpha} - 3\sqrt{\beta} \\
\Leftrightarrow \quad & 7\alpha - 12\sqrt{\alpha\beta} \geq \left(\sqrt{3\alpha} - 3\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{3\alpha} + 3\sqrt{\beta}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 7\alpha - 12\sqrt{\alpha\beta} \geq 3\alpha - 9\beta \\
\Leftrightarrow \quad & 4\alpha - 12\sqrt{\alpha\beta} + 9\beta \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (2\sqrt{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{\alpha} \cdot 3\sqrt{\beta} + (3\sqrt{\beta})^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(2\sqrt{\alpha} - 3\sqrt{\beta}\right)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει.}
\end{aligned}
$$