Σύνολα - Δειγματικός χώρος - Πιθανότητες

Άσκηση 1.

Να γραφούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

(α) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

(β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$

(γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$

(δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N} \mid x(x+1) = 0\}$

Λύση. (α) Αφού $x \in \mathbb{Z}$ και $-3 \leq x \leq 3$ έχουμε ότι $x = -3$ ή $x = -2$ ή $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$. Επομένως,

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

(β) Αφού $x \in \mathbb{Z}$ και $-3 \leq x < 3$ έχουμε ότι $x = -3$ ή $x = -2$ ή $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$. Επομένως,

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

(γ) Αφού x φυσικός και διαιρέτης του 16 έχουμε ότι $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 4$ ή $x = 8$ ή $x = 16$. Επομένως,

$$\Gamma = \{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

(γ) Έχουμε ότι $x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$. Αφού $x \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $x = 0$ Επομένως,

$$\Gamma = \{0\}.$$

Άσκηση 2.

Δίνονται τα σύνολα $A = \{-1, 0, k\}$ και $B = \{\lambda, 0, 4\}$. Να βρεθούν οι αριθμοί k, λ ώστε τα δύο αυτά σύνολα να είναι ίσα.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επομένως, πρέπει

$$k = 4 \text{ και } \lambda = -1.$$

Άσκηση 3.

Θεωρούμε το βασικό σύνολο

$$\Omega = \{-2, -1, 0, 3, 4, 7, 12\}$$

και τα υποσύνολά του $A = \{-2, 0, 7\}$ και $B = \{-1, 0, 7, 12\}$. Να βρεθούν τα σύνολα:

(α) $A \cup B$ και $A \cap B$

(β) A' και B'

(γ) $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$

(δ) $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 7, 12\} \quad \text{και} \quad A \cap B = \{0, 7\}.$$

(β) Τα A' και B' αποτελούνται από τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στα A και B αντίστοιχα. Επομένως,

$$A' = \{-1, 3, 4, 12\} \quad \text{και} \quad B' = \{-2, 3, 4\}.$$

(γ) Το σύνολο $(A \cup B)'$ αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο $A \cup B$. Επομένως,

$$(A \cup B)' = \{3, 4\}.$$

Το σύνολο $A' \cap B'$ αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A' και B'. Επομένως,

$$A' \cap B' = \{3, 4\}.$$

(δ) Το σύνολο $(A \cap B)'$ αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο $A \cap B$. Επομένως,

$$(A \cap B)' = \{-2, -1, 3, 4, 12\}.$$

Το σύνολο $A' \cup B'$ αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A' και B'. Επομένως,

$$A' \cup B' = \{-2, -1, 3, 4, 12\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\boxed{(A \cup B)' = A' \cap B'} \qquad \text{και} \qquad \boxed{(A \cap B)' = A' \cup B'}$$

Άσκηση 4.

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

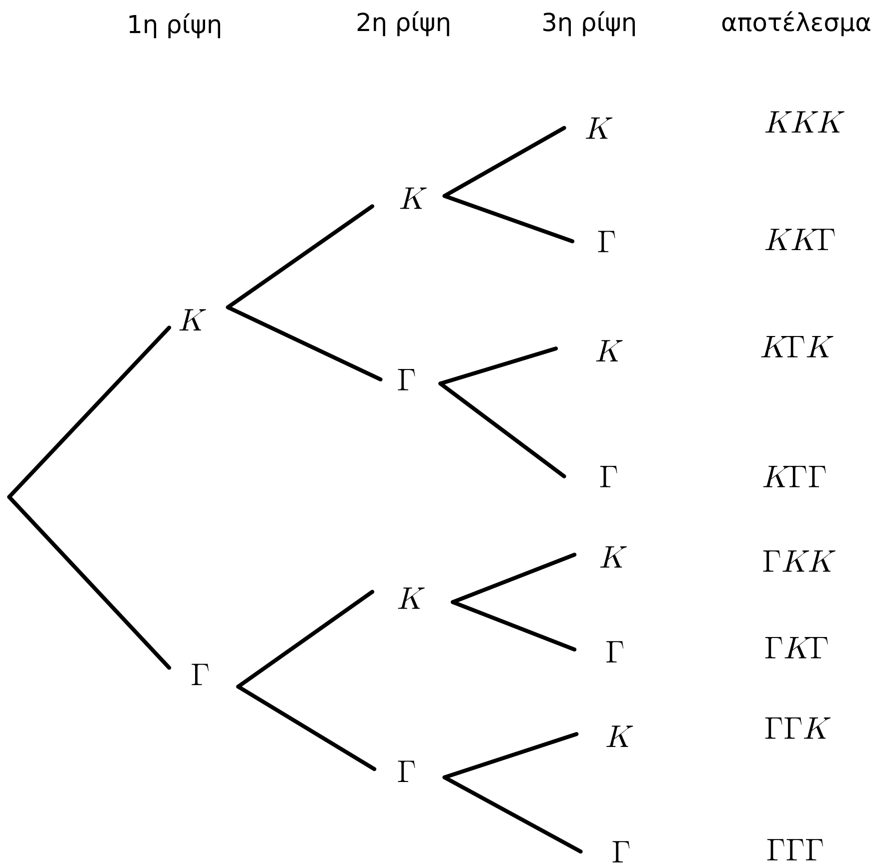
(α) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

(β) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

- A_1: «ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ»
- A_2: «ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2»
- A_3: «ο αριθμός των Γ είναι τουλάχιστον 2»
- A_4: «ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις»
- A_5: «στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Γ»

(γ) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A_3', $A_5 \cap A_2$ και $A_5 \cup A_4$.

Λύση. (α) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο Ω, θα χρησιμοποιήσουμε ένα **δεντροδιάγραμμα**:



Επομένως, ο δειγματικός χώρος Ω είναι

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

(β) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω, έχουμε ότι

- $A_1 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$
- $A_2 = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$
- $A_3 = \{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$
- $A_4 = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$
- $A_5 = \{\Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

(γ) Το A_3' περιέχει όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχονται στο A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των Γ είναι μικρότερος από 2. Άρα,

$$A_3' = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει όλα τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_5, δηλαδή τα στοιχεία με 2 ακριβώς K εκ των οποίων το Γ να είναι στη πρώτη θέση. Άρα,

$$A_5 \cap A_2 = \{\Gamma KK\}.$$

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που στην πρώτη θέση έχουν Γ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Οπότε,

$$A_5 \cup A_4 = \{KKK, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Άσκηση 5.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

(α) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

(β) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B είναι το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

(γ) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B είναι το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

(δ) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B είναι το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

Λύση. (α) Έχουμε ότι $A = \{3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Οπότε, $A \cap B = \emptyset$ κι έτσι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

(β) Επειδή υπάρχουν Έλληνες που είναι καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι, $A \cap B \neq \emptyset$. Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

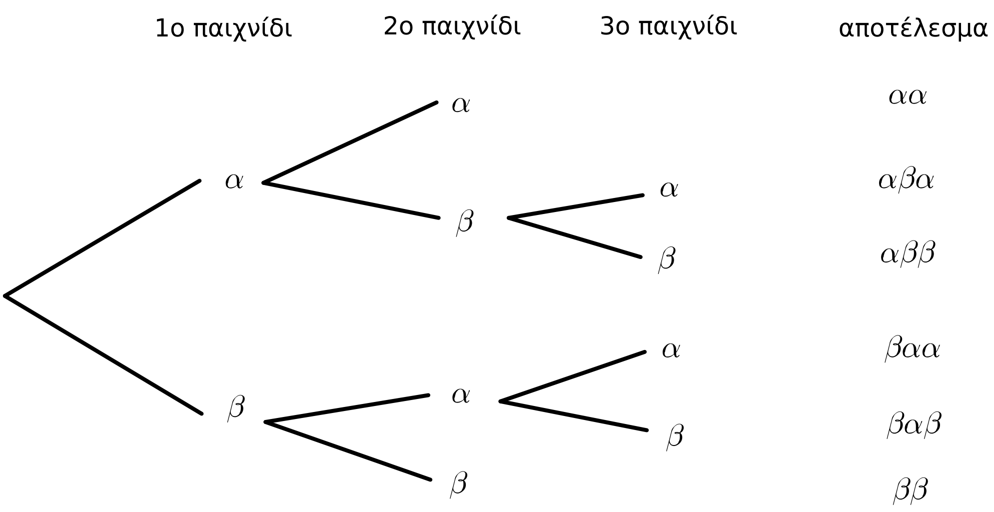
(γ) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30 που είναι παντρεμένες πάνω από 30 χρόνια, έχουμε ότι $A \cap B \neq \emptyset$. Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

(δ) Επειδή το αυτοκίνητο δεν μπορεί να είναι ευρωπαϊκό και ασιατικό ταυτόχρονα, έχουμε ότι $A \cap B = \emptyset$. Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 6.

Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση. Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο Ω, χρησιμοποιούμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\alpha\alpha,\ \alpha\beta\alpha,\ \alpha\beta\beta,\ \beta\alpha\alpha,\ \beta\alpha\beta,\ \beta\beta\}$.

□

Άσκηση 7.

Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

(α) μαύρη

(β) άσπρη ή μαύρη

(γ) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

Λύση. Το κουτί συνολικά περιέχει

$$10 + 15 + 5 + 10 = 40 \text{ μπάλες.}$$

(α) Οι μαύρες μπάλες που περιέχονται στο κουτί είναι 15. Επομένως, η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη είναι $\frac{15}{40}$.

(β) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}.$$

(γ) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{10+15}{40} = \frac{25}{40}.$$

Άσκηση 8.

Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρεθεί η πιθανότητα

(α) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος

(α) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

Λύση. Έστω Λ, Π και N τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντίστοιχα. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι

$$P(\Lambda) = \frac{30}{100}, \qquad P(\Pi) = \frac{20}{100}, \qquad P(N) = \frac{40}{100}.$$

(α) Τα ενδεχόμενα Λ και Π είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\Lambda \cup \Pi) &= P(\Lambda) + P(\Pi) \\ &= \frac{30}{100} + \frac{20}{100} \\ &= \frac{50}{100}. \end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος είναι 50%.

(β) Η πιθανότητα να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος ισούται με

$$\begin{aligned} P\left[(\Lambda \cup N)'\right] &= 1 - P(\Lambda \cup N) \\ &= 1 - (P(\Lambda) + P(N)) \\ &= 1 - P(\Lambda) - P(N) \\ &= 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} \\ &= \frac{30}{100}. \end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος είναι 30%.

Άσκηση 9.

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \dfrac{17}{30}$, $P(B) = \dfrac{7}{15}$, και $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$.

Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cap B)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2}{3}=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-P(A\cap B)\\
\Leftrightarrow\quad & P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-\frac{2}{3}\\
\Leftrightarrow\quad & P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{14}{30}-\frac{20}{30}\\
\Leftrightarrow\quad & P(A\cap B)=\frac{11}{30}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 10.

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, και $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$.

Να βρεθεί η πιθανότητα $P(B)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & P(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\quad & P(B)=\frac{5}{6}-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\\
\Leftrightarrow\quad & P(A\cap B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 11.

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, έχουμε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cup B)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + 1 - P(B') - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{6}{12} + \frac{12}{12} - \frac{8}{12} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Άσκηση 12.

Ένα κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μια τουλάχιστον από τις δύο κάρτες;

Λύση. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{25}{100}, \qquad P(B) = \frac{55}{100}, \qquad P(A \cap B) = \frac{15}{100}.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= \frac{25}{100}+\frac{55}{100}-\frac{15}{100} \\ &= \frac{65}{100}. \end{aligned}$$

Άρα, το 65% των πελατών έχει μια τουλάχιστον από τις δύο κάρτες.

Άσκηση 13.

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

(α) τουλάχιστον μία ασθένεια;

(β) μόνο μία ασθένεια;

Λύση. Έστω Y το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και K το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία καρδιακή ασθένεια. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι

$$P(Y)=\frac{10}{100}, \qquad P(K)=\frac{6}{100}, \qquad P(Y\cap K)=\frac{2}{100}.$$

(α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(Y\cup K) &= P(Y)+P(K)-P(Y\cap K) \\ &= \frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{2}{100} \\ &= \frac{14}{100}. \end{aligned}$$

(β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μία ασθένεια είναι το $(Y-K)\cup(K-Y)$. Επειδή τα ενδεχόμενα $Y-K$ και $K-Y$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P\big[(Y-K)\cup(K-Y)\big] &= P(Y-K)+P(K-Y)\\
&= P(Y)-P(Y\cap K)+P(K)-P(Y\cap K)\\
&= P(Y)+P(K)-2P(Y\cap K)\\
&= \frac{10}{100}+\frac{6}{100}-2\cdot\frac{2}{100}\\
&= \frac{12}{100}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 14.

Αν $\dfrac{P(A)}{P(A')}=\dfrac{3}{4}$, να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)}=\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow 4P(A)=3(1-P(A))\\
&\Leftrightarrow 4P(A)=3-3P(A)\\
&\Leftrightarrow 7P(A)=3\\
&\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{7}.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P(A') &= 1-P(A)\\
&= 1-\frac{3}{7}\\
&= \frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 15.

Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι

(α) $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$

(β) $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \subseteq A \cup B \quad &\Rightarrow \quad P(A) \leq P(A \cup B) \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{3} \leq P(A \cup B). \quad (1) \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $P(A \cup B) \leq 1$ (2). Συνδιάζοντας τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει ότι $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$.

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \cap B \subseteq B \quad &\Rightarrow \quad P(A \cap B) \leq P(B) \\ &\Rightarrow \quad P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} \leq P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \quad P(A \cup B) \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1, \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

Οπότε, $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B)$ (2). Συνδιάζοντας τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει ότι

$$\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}.$$