<u>ΙΔΙΩΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ & ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ</u>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 06/06/2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία μέσα από το σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία μέσα από το σχολικό βιβλίο.

Α3. Θεωρία μέσα από το σχολικό βιβλίο.

Α4. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

Θέμα Β

Β1. $Dgoh = \{x \epsilon D_h : h_{(x)} \epsilon D_g\} = \{x \epsilon (0, +\infty) : lnx \epsilon f\} = (0, +\infty)$

Άρα $A_{goh} = (0, +\infty)$ με $f(x) = g\big(h(x)\big) = g(lnx) = \frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4-x^2}{x}, x > 0$

Β2. i) $f'(x) = \frac{-2x \cdot x - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0$ για $x \epsilon (0, +\infty)$

Άρα f φθίνουσα για $x\epsilon(0, +\infty)$.

ii) $f(\pi) = \frac{4-\pi^2}{\pi}$ και $f(e) = \frac{4-e^2}{e}$ όμως $\pi > e$ και f φθίνουσα για $x\epsilon(0, +\infty)$

Άρα $f(\pi) < f(e) \leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e}$ $4 - e^2 < 0$ *άρα*

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3. Εφόσον $\lim_{x\to 0^+}\frac{4-x^2}{x} = +\infty$ τότε η $\varepsilon: x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}} = \lim_{x\to+\infty}(-\boldsymbol{x}) = -\infty$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = -1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$

Έχει πλάγια ασύμπτωτη την $\varepsilon: y = -x$

B4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})}{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\cdot\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})\right]$$

$$\left|\frac{x}{4-x^2}\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Άρα $-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \le \frac{x}{4-x^2}\sigma\upsilon\nu(1+x^2) \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\right|\right) = \mathbf{0}$$

Τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} = \mathbf{0}$

Θέμα Γ

$A_f = \mathbb{R}$

Γ1.

$$\int_2^2 xf(x)dx = 1 \Rightarrow \int_2^2 x(\frac{1}{x} + a)dx = 1 \Rightarrow \int_2^2 (1 + ax)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow [x + a\frac{x^2}{2}]_2^3 = 1 \Rightarrow\Rightarrow 3 + \frac{9}{2}a - (2 + 2a) = 1 \Rightarrow 5\frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

Γ2.

i)

f(1)=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}(x - 2) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x\to 1^+}(-\frac{1}{x}) = -1$$

Έχουμε

$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ Επομένως f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με

f΄(1)= - 1

ii)

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - f(1)) \Rightarrow$$

$$(\varepsilon): y = -x + 2$$

Έστω ω η ζητούμενη γωνία

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(1) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \omega = 135^0 \;\delta\iota\acute{o}\tau\iota\quad 0 \le \omega < 180^0$$

Γ3.

Για x<1

f΄(x)=2x-3

$x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 3 < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x < 1$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$

Για $x \geq 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \geq 1$
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞)
Επιπλέον f συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο A_f.

f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ και συνεχής
$f((-\infty, 1)) = (\lim_{x \to 1^-} f(x)) = (1, +\infty)$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$

f γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞) και συνεχής
f([1,+∞))=($\lim_{x \to +\infty} f(x)$,f(1)]

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{x}) = 0$

f(A)=$f((-\infty, 1))$ ∪ f([1,+∞))=(0 ,+∞)

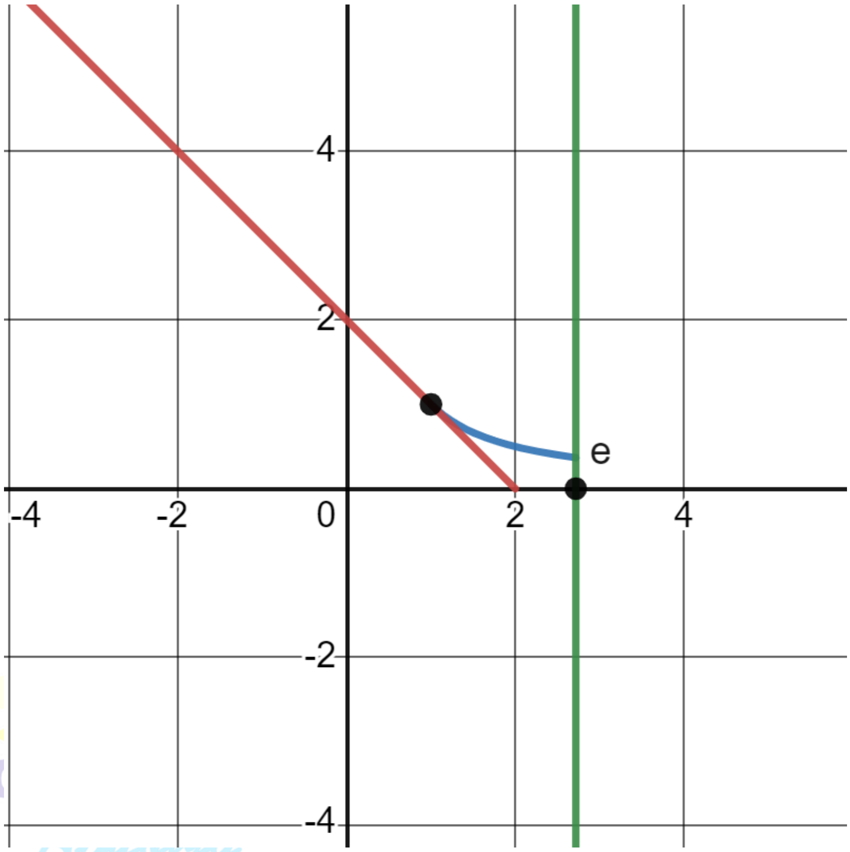
Γ4.
Για $x \geq 1$ έχουμε $f''(x) = \frac{1}{x^3} > 0 \forall x \geq 1 ά\rho\alpha f \kappa\upsilon\rho\tau ή$
Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Σημείο επαφής C_f με (ε) το (1,1)
Σημείο τομής της (ε) με τον x΄x το (2,0)
Η (ε) βρίσκεται πάνω από τον x΄x στο [1,2)
Επομένως $\Omega = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)|dx + \int_2^e f(x)dx$

- $I_1 = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)|dx = \int_1^2 [f(x) - (-x+2)]dx = \int_1^2 (\frac{1}{x} + x - 2)dx = [\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x]_1^2 = [lnx + \frac{x^2}{2} - 2x]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

- $I_2 = \int_2^e |f(x)|dx = \int_2^e f(x)\, dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_2^e = [\ln x]_2^e = 1 - \ln 2$

Άρα $\Omega = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$



Θέμα Δ

Δ1

Ονομάζω Φ(x)=$\frac{f(x)-2x}{x-1}$ για x κοντά στο 1 και $\lim_{x\to 1} \Phi(x) = l \in R$

Και f(x)=Φ(x)(x-1)+2x

$\lim_{x\to 1}[\Phi(x)(x-1)+2x] = 2 \;\; άρα \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

$και\ f\ συνεχής\ στο\ (0,2)\ ως\ πράξεις\ και$ σύνθεση συνεχών άρα

f συνεχής και στο 1 τότε f(1)= $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

δηλαδή 2=f(1)=-1+k τότε k=3

Δ2

f παρ/μη στο (0, 2) ως πράξει και σύνθεση παρ/μων με

f' (x)=$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$ για κάθε x∈ (0, 2) $είναι$ $\frac{x+2}{x^2(x-2)} < 0$

τότε : Αν $x \in (0,1)$ είναι f '(x)>0 και f συνεχής στο 1 τότε

f γν. αύξουσα στο (0,1] f((0,1]=$\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

Επειδή 0∈ $f\big((0,1]\big) και\ f(1) \neq 0$, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$:

f$(x_1) = 0$ και f γνης. Αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,1)$

όμοια η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_2 ∈(1,2)

Τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει 2 ακριβώς ρίζες στο (0, 2) με $x_1 < 1 < x_2$

Είναι 0=f(x_1)<f($\frac{1}{3}$)=ln$\frac{5}{2}$ και f γν. αύξουσα άρα x_1<$\frac{1}{3}$

Δ3

f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$

f παρ/μη στο $(x_1, \frac{1}{3})$

διότι f παρ/μη στο (0, 2)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

Η f ‘ (x)=$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$ είναι παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με

f ‘ ‘ (x)=$-\frac{1}{(x-2)^2} - 2\frac{1}{x^3} < 0$

στο (0, 2) οπότε f' γν. φθίνουσα άρα και 1-1

Τελικά υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό σημείο Μ(ξ,f(ξ)) ώστε η κλίση της f είναι $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

Δ4

i) *Υπάρχει c : F(x)=G(x)+c*
Για x=x_1 G(x_1)=-c

Για x=x_2 F(x_2)=c *Τότε : F(x_2)+ G(x_1)=0*

ii) *Ονομάζω H(x)=*$x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2$
H συνεχής στο [x_1, x_2]
και
H(x_1) $= x_2G(x_2) - x_1 + x_2 > 0$

H(x_2) $= x_1F(x_1) + x_1 - x_2 < 0$
Διότι $x_2 > 0,\ -x_1 + x_2 > 0$ *και*

Διότι f *υνεχής στο*(x_1, x_2) *και* $f(x) \neq 0$

άρα f *διατηρεί σταθερό πρόσημο στο* (x_1, x_2) *και f(1)=2>0*

Άρα f(x)>0 και G, F γν. αύξουσες

$x_1 < x_2 \rightarrow G(x_1) < G(x_2) = 0$ *Όμοια* $F(x_1) > 0$ *και*

$$x_1, x_2 > 0\ , x_2 - x_1 > 0$$

Από Θ. Bolzano H(x)=0 άρα και η αρχική έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) *Και*

H παρ/μη ως πράξεις παρ/ων με H ‘ (x)= $(x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0$
άρα H γν. μονότονη τότε 1-1 Τελικά η εξίσωση H(x)=0 άρα και η αρχική έχει μοναδική ρίζα στο (x_1, x_2)