ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 06-06-22

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α.2 Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α.3 Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α.4

α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

Θέμα Β

Β.1

$$D_h = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} = \begin{cases} x \in [0,\infty) \\ g(x) \in (-\infty,1] \end{cases} = [0,1]$$

$$h(x) = fog(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β.2

Για την εύρεση της αντίστροφης

$\Theta \acute{\varepsilon} \tau \omega : y = h(x)$

$y = (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{y} = |x-1| \overset{0\leq x\leq 1}{\Leftrightarrow}$

$\sqrt{y} = -x + 1 \Leftrightarrow$

$x = 1 - \sqrt{y}$

$\acute{O}\mu\omega\varsigma\ 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$

$\acute{A}\rho\alpha\ \mathrm{D}_{h^{-1}} = [0,\ 1]$ και

$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x},$

Β.3 i)

Η $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\varphi(1)=\frac{1}{2}$ και

$$\lim_{x\to1}\varphi(x)=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Δηλαδή φ συνεχής και στο $x_0=1$ Οπότε φ συνεχής στο [0, 1] και $\varphi(0)\neq\varphi(1)$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος των Ενδιάμεσων Τιμών.

ii) Έχουμε ότι

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Rightarrow\varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0)$$

Από το ΘΕΤ στο [0,1] για την φ(x) υπάρχει $x_0\in(0,1)$, $\tau.\omega.$ $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$

Θέμα Γ

Γ.1

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$$

Για x> -1 , έχουμε ότι :

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων ισχύει ότι $f(0)=0$

$f'(x)=\left(x^3-x\right)'$ άρα υπάρχει σταθερά $c\in R$: $f(x)=x^3-x+c_1$, και $f(0)=0$, άρα $c_1=0$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f(x)=x^3-x$ για x>-1

Για x < -1 , έχουμε ότι :

$f'(x)=\left(-2x\right)'$ άρα υπάρχει $c_2\in R: f(x)=-2x+c_2$

Και f συνεχής στο R άρα και στο -1 τότε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\Rightarrow2+c_2=0\Rightarrow c_2=-2$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x<-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Επιπλέον, f συνεχής στο $x_0=-1$, άρα $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$.

$$T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}: f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}=\begin{cases}-2x-2, & x\le-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

Γ.2

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο x_0>-1 είναι (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

Η (ε) τέμνει yy΄ στο (0,-2) άρα :

$$-2-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$$

$$-2-\left(x_0^{\,3}-x_0\right)=\left(3x_0^{\,2}-1\right)(-x_0)$$

$$2x_0^{\,3}-2=0$$

$$x_0^{\,3}=1\Rightarrow x_0=1$$

Τελικά (ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$

Γ.3

Από το Γ2 (ε):y=2x-2

Έστω t η τυχαία χρονική στιγμή, τότε

x=x(t)

y=y(t)=2x(t)-2, με $t \geq 0$

και t_0 η συγκεκριμένη χρονική στιγμή τότε $x(t_0)=3$, $y(t_0)=4$, $x'(t_0)=2$ μ/sec

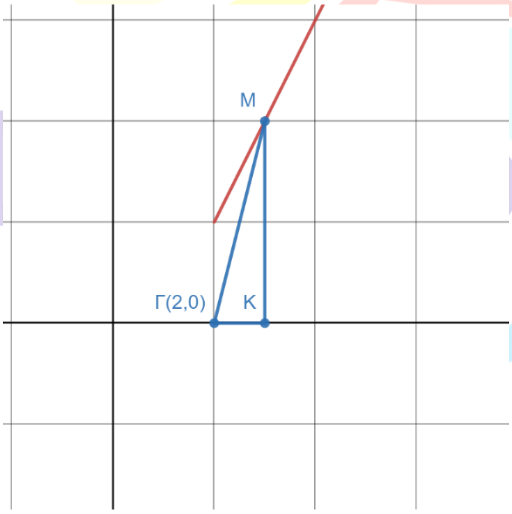
$E=\frac{1}{2}\left(x_M - x_\Gamma\right)\bullet y_M$

$E(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\bullet y(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\bullet\left(2x(t)-2\right)=\left(x(t)-2\right)\bullet\left(x(t)-1\right)=x^2(t)-3x(t)+2$

Ε παρ/μη ως πολλυώνυμο με $E'(\mathrm{t})=2x(t)x'(t)-3x'(t)$

Για $\mathrm{t}=\mathrm{t}_0$, έχουμε :

$E'(\mathrm{t}_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=6\tau.\mu./\sec$



Γ.4

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$$

$$*\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \underset{\text{όταν } x\to-\infty,\text{ τότε το } u\to+\infty}{\overset{\text{Θέτω } f(x)=u}{=}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}$$

όμως για u κοντά στο $+\infty$ είναι : $\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| \iff -\left|\frac{1}{x}\right| \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \left|\frac{1}{x}\right|$

και $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{u}\right| = \lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{u}\right|\right)=0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής υπάρχει $\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$

επομένως και $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

$$*\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} \underset{\text{όταν } x\to-\infty,\text{ τότε το } u\to+\infty}{\overset{\text{Θέτω } u=-x}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Άρα το ζητούμενο όριο $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right]+\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1$

Θέμα Δ

Δ.1

$f:(0,+\infty)\to\Re$

$f(x)=x-\ln(3x)$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

Εξετάζουμε πότε :

$f'(x)>0 \iff x>1$

$f'(x)<0 \iff x<1$

$f'(x)=0 \iff x=1$

	-∞	0	1	+∞
f '(x)		‖ -	+	
$f(x)$		‖ ↘	↗	

Η f είναι συνεχής στο x=1 και .

Η f ' (x)<0 στο (0,1) , άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1].

Η f ' (x)>0 στο (1,+∞) , άρα f είναι γνησίως αύξουσα [1,+∞).

$$f\big((0,1]\big) \underset{\text{Η f είναι γνησίως φθίσουσα}}{\overset{\text{Η f είναι συνεχής}}{=}} [f(1), \lim_{x\to0^+}f(x)) = [1-\ln3,+\infty)$$

αφού $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-\ln x)=+\infty$

$$f([1,+\infty)) \underset{\text{H f είναι γνησίως αύξουσα}}{\overset{\text{H f είναι συνεχής}}{=}} [f(1), \lim_{x\to\infty} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$$

αφού $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\ln(3x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right) = +\infty$

διότι $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x)}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3x}(3x)'}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$

η $f(1) = 1-ln3 < 0.$

$\delta\iota\acute{o}\tau\iota: 1-ln3 < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow e < 3$ που ισχύει

Άρα $0 \in f(0,1]$ και $f(1)\neq 0$ και f $\searrow$, άρα "1-1" στο (0,1), οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$, τ.ω. $f(x_1)=0$,

όμοια υπάρχει μοναδικό x_2 στο $(1,\infty)$, τ.ω. $f(x_2)=0$

ii) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, *παρ / μη* ως πράξεις παρ/ων με $f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0$, στο $(0,+\infty)$, άρα f είναι κυρτή.

Δ.2

Στο (x_1,x_2) είναι f συνεχής , και $f(x)\neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Το $1\in (x_1,x_2)$, με f(1)=1-ln3<0, άρα $f(x)<0$ *στο* (x_1,x_2) και $f(x_1)=f(x_2)=0$

άρα $f(x)\leq 0$ στο $[x_1,x_2]$

Η εξίσωση f(x)=0 έχει ρίζες μόνο τους : $x_1<x_2$ άρα

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx = \int_{x_1}^{x_2}(-f(x))dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\ln(3x)-x\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)dx - \int_{x_1}^{x_2}xdx =$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - (x_2-x_1) - \frac{1}{2}(x_2{}^2 - x_1{}^2),$$

όμως x_1, x_2 ρίζες της f(x)=0, άρα $\ln(3x_1)=x_1,\ \ln(3x_2)=x_2$, άρα

$$E=x_2{}^2 - x_1{}^2 - (x_2-x_1) - \frac{1}{2}(x_2{}^2-x_1{}^2) = \frac{1}{2}(x_2{}^2-x_1{}^2) - (x_2-x_1) = \frac{1}{2}(x_2-x_1)\bullet(x_2+x_1-2)$$

Δ.3

$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\bullet(x_2+x_1-2)>0$ και $(x_2-x_1)>0$, άρα $x_2+x_1-2>0$

$x_2 > 2-x_1$ και επειδή $x_2>1$ και $x_1<1 \Leftrightarrow -x_1>-1 \Leftrightarrow 2-x_1>2-1 \Leftrightarrow 2-x_1>1$

άρα : $1<2-x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_2) > f(2-x_1) \Rightarrow f(2-x_1)<0$

Δ.4

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2, f(x_2))$ είναι η (ε): $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2)$

και f κυρτή άρα C_f είναι πάνω από την (ε) για κάθε $x\in(0,\infty)$, εκτός από το σημείο επαφής,

άρα $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$ (1), το "ίσον" ισχύει μόνο για $x=x_2$.

και από το Δ1 έχουμε ότι :

f $\searrow$ (0,1] και f $\nearrow$ [1, +∞), άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ που είναι το μοναδικό τ. ακρότατο στο (0, ∞), οπότε στο $x_0 = 1$, η f έχει ολικό ελάχιστο. Αρά $f(x) \geq f(1)$ (2) το "ίσον", ισχύει μόνο για x=1. Στις (1), (2) δεν ισχύουν συγχρόνως οι ισότητες

Οπότε (1),(2) $\overset{(+)}{\Rightarrow}$ $2f(x) > f(1) + f'(x_2)(x\text{-}x_2)$ $\Rightarrow$ $2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x\text{-}x_2)$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, , άρα η δοσμένη εξίσωση είναι αδύνατη στο (0, ∞).