Πανελλαδικές εξετάσεις 2021

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου

Ενδεικτικές απαντήσεις θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1 θεωρία (σελ.135 / Β.Ο.)

Α2 θεωρία (σελ.51 /Β.Ο)

Α3 θεωρία (σελ.23 /Β.Ο.)

Α4

α. Σ
β. Λ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Από την (1) όπου x το $x-1$ προκύπτει ότι

$$f(x-1+1)=(x-1+1)\cdot e^{-x+1} \Leftrightarrow f(x)=x\cdot e^{1-x}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β2 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}\cdot(1-x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	max	↘	

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Επίσης παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$. Δηλαδή ισχύει ότι $f(x)\le f(1)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B3 Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}=-e^{1-x}\cdot(2-x)=e^{1-x}\cdot(x-2), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f			Σ.Κ		

Οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$. Επίσης παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0=2$ το $\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

Η f είναι συνεχής και ορισμένη στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης,

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ex}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$,

Οπότε η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ στο $+\infty$.

B4 **(i)** Έστω $\Delta_1=(-\infty,1]$ και $\Delta_2=(1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στα Δ_1,Δ_2 και επίσης από το B2 έχουμε ότι $f\nearrow\Delta_1$ και $f\searrow\Delta_2$. Οπότε,

- $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$
- $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right)=(0,1)$

Οπότε, $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]$.

(ii) Έχουμε ότι η f είναι 1-1 στα $\Delta_1=(-\infty,1]$ και $\Delta_2=(1,+\infty)$ ως γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

- Αν $\lambda\in(-\infty,0)$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και $\lambda\notin f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1.
- Αν $\lambda=0$, τότε $0\in f(\Delta_1)$ και $0\notin f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1.
- Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 2 ακριβώς ρίζες $\rho_1\in\Delta_1$ και $\rho_2\in\Delta_2$.
- Αν $\lambda=1$, τότε $1\in f(\Delta_1)$ και $1\notin f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1.
- Αν $\lambda\in(1,+\infty)$, τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$ και $\lambda\notin f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\quad \text{με } \alpha<-3.$$

Γ1 Έχουμε ότι

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική.
- Στο $x_0=0$ έχουμε ότι
  - $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\alpha x^3-3x^2-x+1)=1$
  - $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sigma\upsilon\nu x=1$
  - $f(0)=1$

  Οπότε είναι συνεχής στο 1.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $A_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

και αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2 **(i)** Έχουμε ότι

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
- $f(0)=1$ και $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$. Οπότε, $f(0)\neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ κι έτσι δεν ικανοποιείται η συγκεκριμένη προϋπόθεση.

(ii) Έχουμε ότι $f'(\xi)=0\Leftrightarrow -\eta\mu\xi=0\overset{\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\xi=\pi$.

Γ3 Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$. Έχουμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0$ η οποία είναι αδύνατη διότι $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ αφού $\alpha<-3$.

Γ4 Έχουμε ότι

- Για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει ότι $f'(x)\neq 0$ και η f' είναι συνεχής στο διάστημα αυτό με $f'(0)=-1<0$. Οπότε, $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
  Οπότε,
  $$x\leq 0\;\Rightarrow\; f(x)\geq f(0)=-1.$$

- Για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \geq -1$.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έχουμε ότι $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$. Έστω $k(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- Η k είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών.
- $k(1) = -1 < 0$ και $k(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$.

Από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ για το οποίο ισχύει ότι $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$. Επιπλέον, η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $k'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$. Άρα είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη κι έτσι προκύπτει ότι το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο $(0, +\infty)$.

Δ2 Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε ότι

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \overset{\Delta 1}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x_0 x}.$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Οπότε έχουμε ότι $f \searrow (0, x_0]$,

$f \nearrow [x_0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = 0$.

Δ3 Έχουμε αρχικά ότι

$$g(x)=h(x) \Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{\,x+1}}{e\cdot e^{x}} \Leftrightarrow ex=x_0^{\,x+1} \quad (1)$$

- Αν $x\le 0$ η (1) είναι αδύνατη
- Αν $x>0$ η (1) γίνεται

$$(1) \Leftrightarrow \ln(ex)=\ln x_0^{\,x+1} \overset{\Delta1}{\Leftrightarrow} 1+\ln x=(x+1)\cdot\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x=(x+1)\cdot\ln x_0-1$$

$$\Leftrightarrow \ln x=f(x)+\ln x \Leftrightarrow f(x)=0.$$

Όμως, από Δ2 έχουμε ότι $f(x)\ge f(x_0)=0$, για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα, $g(x)=h(x) \Leftrightarrow x=x_0$.

Έτσι έχουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g,h έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη το x_0. Για να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο αρκεί να δειχθεί ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$:

$$g'(x_0)=h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}-g(x_0)=h(x_0)\cdot(\ln x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}-h(x_0)=h(x_0)\ln x_0-h(x_0)$$

$$\Leftrightarrow h(x_0)=x_0e^{-x_0},\ \text{που ισχύει}.$$

Δ4 Η απόσταση των σημείων Α και Β ισούται με $d(x)=f(x)-\varphi(x),\ x>0$. Από υπόθεση έχουμε ότι $d(x)\ge d(x_0),\ x>0$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $d'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$. Όμως, το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$ και θέση τοπικού ακροτάτου της d. Από Θεώρημα Fermat έχουμε ότι

$$d'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0) \underset{Fermat\ \sigma\tau\eta\nu\ f}{\overset{\Delta 2}{\Leftrightarrow}} \varphi'(x_0)=0.$$

Οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Οπότε, σε κάθε περίπτωση δείξαμε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.