Πανελλαδικές εξετάσεις 2020

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου

Ενδεικτικές απαντήσεις θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1 θεωρία

Α2 θεωρία

Α3

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(x)=3x^2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α4

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστο

ΘΕΜΑ Β

Β1 Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ πρέπει $\left\{\begin{matrix} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ e^x>1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x>0$. Επομένως, έχουμε ότι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $A_{f\circ g}=(0,+\infty)$.

Β2 Έστω $x_1,x_2\in A_{f\circ g}=(0,+\infty)$ με $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$. Έχουμε ότι

$$(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}$$

$$\Rightarrow e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1+x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2$$

$$\Rightarrow 3\mathrm{e}^{x_1}=3e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η $f\circ g$ είναι 1-1. Για την εύρεση της αντίστροφης, έχουμε ότι

$(f\circ g)(x)=y \Rightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x-1}=y \Rightarrow e^x+2=ye^x-y \Rightarrow e^x(1-y)=-2-y$. Αν $y=1$ είναι αδύνατη. Για $y\neq 1$ έχουμε ότι

$\Rightarrow\ e^x=\dfrac{y+2}{y-1}\ \Rightarrow\ x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, με $\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. Επίσης, πρέπει $x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)>0\ \Rightarrow\ \dfrac{y+2}{y-1}>1\ \Rightarrow\ \dfrac{3}{y-1}>0\ \Rightarrow\ y>1$. Οπότε, έχουμε ότι

$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ με πεδίο ορισμού $A_{(f\circ g)^{-1}}=(1,+\infty)$.

Β3 Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $\varphi'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}<0$, για κάθε $x>1$. Οπότε, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4 Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ και θέτοντας $\dfrac{x+2}{x-1}=u$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ και θέτοντας $\dfrac{x+2}{x-1}=u$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=1.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$ με $\lambda>0$ είναι συνεχής στο 0.

Έχουμε ότι

- $f(0)=-\ln\lambda$
- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x\right)=\lambda$

Οπότε, πρέπει $1-\ln\lambda=\lambda$. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\ln x+x-1, x>0$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα διότι $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$, για κάθε $x>0$. Άρα,

$1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow g(\lambda)=0\Leftrightarrow g(\lambda)=g(1)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}\lambda=1$.

Γ2 Για να ορίζεται η εφαπτομένη στο $A(0,1)$ πρέπει η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 0. Έχουμε ότι

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$. Επίσης, αν ω είναι η ζητούμενη γωνία, έχουμε ότι

$f'(0)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{\pi}{4}$.

Γ3 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$, για κάθε $x<0$. Άρα, δεν υπάρχει κρίσιμο σημείο στο $(-\infty,0)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Έχουμε ότι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \overset{x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{4}.$$

Επιπλέον έχουμε ότι $f'(0)=1\neq 0$.

Άρα, τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι τα $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Γ4 Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(a,f(\alpha)),\ \alpha\leq 0$ έχει εξίσωση $\varepsilon:\ y-f(a)=f'(a)(x-\alpha)$. Για $y=0$ έχουμε ότι

$-f(a)=f'(a)(x-\alpha) \ \Rightarrow\ x=\dfrac{af'(\alpha)-f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\dfrac{\frac{a}{(1-a)^2}-\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{(1-a)^2}}=2a-1$. Οπότε, τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B\left(2a-1,0\right)$.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι $a(t_0)=-1$ και $a'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$. Έστω $x(t)=2\alpha(t)-1$ η τετμημένη του σημείου Β τη χρονική στιγμή t.

Έχουμε ότι $x'(t)=2\alpha'(t)=-\dfrac{2a(t)}{3}$. Οπότε, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής ισούται με

$x'(t_0)=-\dfrac{2a(t_0)}{3}=\dfrac{2}{3}$ μονάδες/χρόνο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+2x-e$, $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, $f''(x)=e^x+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι

$$f'\big((0,1)\big)\underset{f'\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f'\nearrow}{=}}\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to 1^-}f(x)\right)=\big(1-e,2\big).$$

Αφού $0\in\big(1-e,2\big)$ και f' είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=0$. Επίσης,

- $x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$
- $x_0<x \Rightarrow f'(x_0)<f'(x) \Rightarrow f'(x)>0$

χ	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	min	↗	

Δηλαδή η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0. Άρα, η f παρουσιάζει στο x_0 μοναδική θέση ολικού ελαχίστου. Επίσης, ισχύει ότι

$$f'(x_0)=0 \;\Rightarrow\; e^{x_0}+2x_0-e=0 \;(1)$$

Άρα, $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^{\,2}-ex_0-1\overset{(1)}{=}e-2x_0+x_0^{\,2}-ex_0-1=x_0^{\,2}-(e+2)x_0+e-1$.

Δ2 Ισχύει ότι

$$-1\le \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\le\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \quad (2)$$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right)=+\infty$ αφού από το Δ1 έχουμε ότι $f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0$. Οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$.

Δ3 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in\big[x_0,1\big]$.

- Η h είναι συνεχής στο $\big[x_0,1\big]$ ως πράξεις συνεχών
- $h(x_0)=f(x_0)<0$, διότι $x_0<1 \overset{f\nearrow[x_0,+\infty)}{\Rightarrow} f(x_0)<f(1)=0$
- $h(1)=1-x_0>0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$ με $h(\rho)=0$.

Επιπλέον, έχουμε ότι $h'(x)=f'(x)+1>0$, για κάθε $x\in(x_0,1)$ (από προηγούμενο ερώτημα). Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$ άρα και 1-1. Οπότε, το ρ είναι μοναδικό.

Δ4 Έχουμε ότι $f(x_0)>f(\rho)\left(f'(k)+1\right) \Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)f'(k)$

$$\overset{f(\rho)=x_0-\rho<0}{\Rightarrow} \frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(k)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(k) \quad (3)$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[x_0,\rho\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ)

Οπότε από θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$.

Έχουμε ότι

$\xi<\rho<k \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(k) \Rightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(k)$, οπότε ισχύει η (3).