Πανελλαδικές εξετάσεις 2019

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Ενδεικτικές Απαντήσεις θεμάτων

Θέμα Α

Α1

(α) θεωρία

(β) $i, ii)$ θεωρία

Α2 θεωρία

Α3 θεωρία

Α4

(α) **Λάθος**

διότι για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ενώ δεν είναι σταθερή στο A.

(β) **Λάθος**

διότι για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 2019, & x = 0 \end{cases}$ ισχύει ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 2019$.

Α5 **γ) 4**

Θέμα Β

Β1 Αφού η συνάρτηση f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$, έχουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + \lambda\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 + \lambda = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$$

Β2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, \;\; x \in [2, 3]$. Έχουμε ότι

- η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως άθροισμα συνεχών
- $g(2) = f(2) - 2 = e^{-2} > 0$
- $g(3) = f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = \dfrac{1}{e^3} - 1 < 0$

Από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ με $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0$.

Επιπλέον, έχουμε ότι $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1 στο διάστημα $(2,3) \subseteq \mathbb{R}$. Οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

B3 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -e^{-x} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \quad 1-1 \Rightarrow f$ αντιστρέψιμη. Επιπλέον,

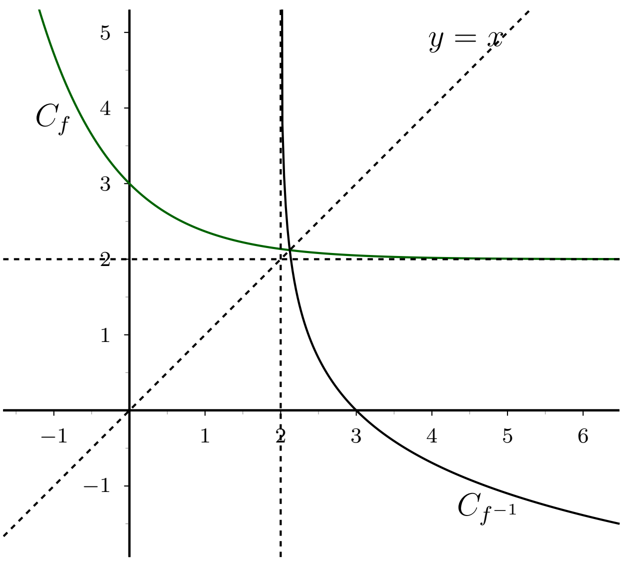
$$\begin{aligned} f(x) = y \iff & e^{-x} + 2 = y \\ \iff & e^{-x} = y - 2 \\ \iff & -x = \ln(y-2), \quad y > 2 \\ \iff & x = -\ln(y-2), \quad y > 2. \end{aligned}$$

Οπότε, $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ με πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$.

B4 Έχουμε ότι $\lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \to 2^+} (-\ln(x-2)) \overset{x-2=u}{=} \lim_{u \to 0^+} (-\ln u) = +\infty$. Οπότε η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = e^{-x}$, είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της e^x ως προς τον άξονα $y'y$. Επιπλέον, η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{-x} + 2$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της φ.

Τέλος, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τη διχοτόμο $y = x$ του 1ου - 3ου τεταρτημορίου. Έτσι έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Θέμα Γ

Γ1 Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη, επομένως έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + 1 = 1 + \beta$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Οπότε, έχουμε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \alpha x, & x < 1 \end{cases}$. Επιπλέον, έχουμε ότι

- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + \alpha - \alpha - 1}{x-1} = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha x - \alpha - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} + \alpha\right) = 1 + \alpha$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=}_{dlH} \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1.$

και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ πρέπει $2 = 1 + \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 1.$

Γ2 Απο το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$.

Ισχύει ότι

- $f'(x) = 2x > 0,$ για κάθε $x > 1$
- $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0,$ για κάθε $x < 1$
- $f'(1) = 2$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κι έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε το σύνολο τιμών της ισούται με

$$f\left(\mathbb{R}\right) = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Γ3

$i)$ Έχουμε ότι $f \nearrow (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f\big[\,(-\infty, 0)\,\big] = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x)\right) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$$

Ισχύει ότι $0 \in f\big[\,(-\infty, 0)\,\big]$ και f 1-1 στο $\mathbb{R}$ (ως γν. μονότονη), οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 < 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

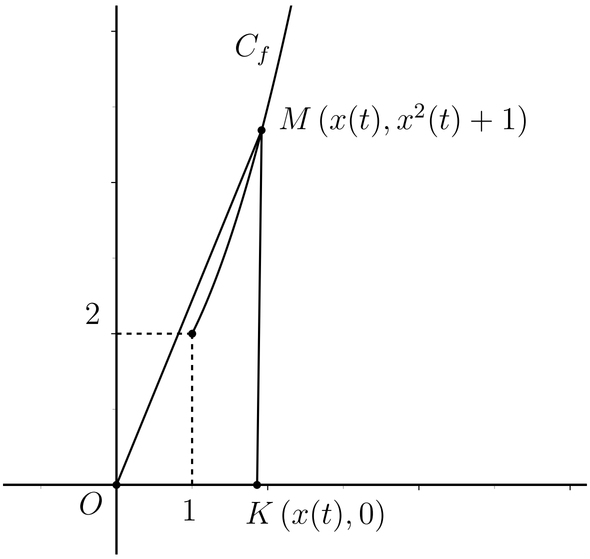
$ii)$ Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ έχουμε ότι

- $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(x) > f(x_0) \Longrightarrow f(x) > 0 \Longrightarrow f^2(x) > 0$ (1)
- $x_0 < 0 \Longrightarrow -x_0 > 0 \overset{f(x)>0}{\Longrightarrow} -x_0 f(x) > 0$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f^2(x) - x_0 f(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$.

Οπότε, η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4 Έστω t_0 η χρονική στιγμή για την οποία ισχύει ότι $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$ μον/sec



Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E(t) = \dfrac{x(t)\cdot(x^2(t)+1)}{2}$. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$E'(t) = \frac{3x^2(t)x'(t) + x'(t)}{2}$$

Για $t = t_0$ προκύπτει τελικά ότι $E'(t_0) = \dfrac{3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = \dfrac{27\cdot 2 + 2}{2} = 28$ τ.μ/sec

Θέμα Δ

Δ1 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η ευθεία $y = -x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1,1)$, έχουμε ότι

$$\left\{\begin{array}{r} f(1) = -1+2 \\ f'(1) = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{array}\right\}$$

Δ2 Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_1^2 \big|f(x)-(-x+2)\big|dx=\int_1^2 \big|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\big|dx$$

και αφού $(x-1)\ln(x^2-2x+2)=(x-1)\ln\big[[(x-1)^2+1\big]\geq 0$, για κάθε $x\in[1,2]$, έχουμε ότι

$$E=\int_1^2 (x-1)\ln\big[[(x-1)^2+1\big]dx.$$

Θέτοντας $(x-1)^2+1=u,\ 2(x-1)dx=du$, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 \frac{\ln u}{2}du \\ &= \frac{1}{2}\left([u\ln u]_1^2-\int_1^2 1du\right) \\ &= \frac{1}{2}(2\ln 2-1) \\ &= \ln 2-\frac{1}{2}\quad \text{τ.μ} \end{aligned}$$

Δ3

$i)$ Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f'(x)=\ln\big[(x-1)^2+1\big]+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1.$

Οπότε

$$\begin{aligned} f'(x)\geq -1 \quad &\Leftrightarrow\quad \ln\big[(x-1)^2+1\big]+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1 \\ &\Leftrightarrow\quad \ln\big[(x-1)^2+1\big]+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διότι

- $(x-1)^2+1\geq 1\ \Rightarrow\ \ln\big[(x-1)^2+1\big]\geq 0$
- $\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$ii)$ Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-2+\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1 \qquad (1) \end{aligned}$$

Η f πληροί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}$ με $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$. Οπότε,

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi) \geq -1$$

που ισχύει λόγω του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ4 Έστω τα σημεία επαφής $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, g(x_2))$. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της C_f στο Α έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_1): \quad y = f'(x_1)\cdot x - x_1 f'(x_1) + f(x_1)$$

η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της C_g στο Β έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_2): \quad y = g'(x_2)\cdot x - x_2 g'(x_2) + g(x_2)$$

Για να ταυτίζονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{c} f'(x_1) = g'(x_2) \\ -x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 g'(x_2) + g(x_2) \quad (2) \end{array} \right\}$$

Όμως, από προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $f'(x_1) \geq -1$ και $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$. Οπότε αναγκαστικά πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2) = -1$. Επίσης,

$$g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_2 = 0.$$

Άρα, η σχέση (2) γίνεται

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 + f(x_1) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1 - 1)\ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) - x_1 + 2 + x_1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1 - 1)\ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 1. \end{aligned}$$

Οπότε, οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη με σημεία επαφής $A(1,1)$, $B(0,2)$ αντίστοιχα, η οποία έχει εξίσωση

$$y = -x + 2.$$