Πανελλαδικές εξετάσεις 2018

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ενδεικτικές Απαντήσεις θεμάτων

Θέμα Α

Α1 θεωρία

Α2

(α) Ψ

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$. Η f είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ διότι $f \nearrow (-\infty, 0]$ και $f \searrow (0, +\infty)$.

Α3 θεωρία

Α4

(α) **Λάθος**

(β) **Λάθος**

(γ) **Σωστό**

(δ) **Σωστό**

(ε) **Σωστό**

Θέμα Β

Β1 Έχουμε ότι $f'(x) = \dfrac{x^3+8}{x^3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Ισχύει ότι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f		$\nearrow$	τμ	$\searrow$	‖	$\nearrow$	

Οπότε έχουμε ότι

- $f \nearrow (-\infty, -2]$
- $f \searrow [-2, 0)$
- $f \nearrow (0, +\infty)$
- παρουσιάζει τοπικο μέγιστο το $f(-2) = -3$

B2 Έχουμε ότι $f''(x) = -\dfrac{24}{x^4} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Οπότε,

- f κοίλη στο $(-\infty, 0)$
- f κοίλη στο $(0, +\infty)$
- η f δεν παρουσιάζει σημεία κάμπης

B3 Έχουμε ότι $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x - \dfrac{4}{x^2} \right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \dfrac{4}{x^2} \right) = -\infty$

Η $x = 0$ είναι μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αφού η f είναι συνεχής στο A_f.
Επιπλέον, έχουμε

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x^3} \right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{4}{x^2} \right) = 0$

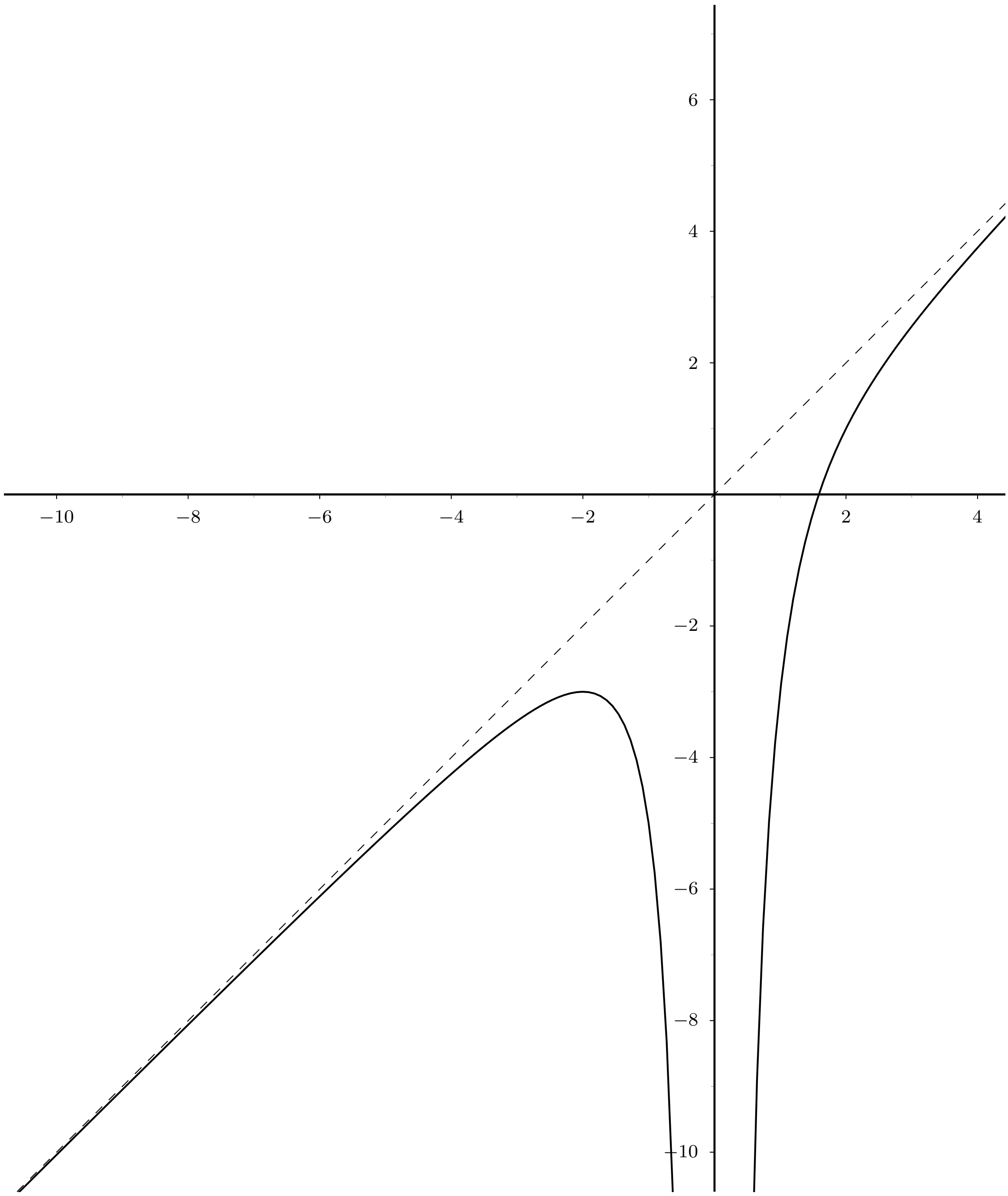
και

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right) = 1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στα $-\infty$, $+\infty$.

B4 Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Θέμα Γ

Γ1 Έστω E_1 το εμβαδόν τετραγώνου και E_2 το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Έχουμε ότι

- η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$. Άρα, $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$
- η περίμετρος του κύκλου είναι $8 - x$. Οπότε $8 - x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$. Άρα, $E_2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$

$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$ και επίσης έχουμε ότι $x > 0$ και $8 - x > 0 \Leftrightarrow x < 8$.
Συνεπώς,

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Γ2 Έχουμε ότι $E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi}$

x	$-\infty$	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	$+\infty$
$E'(x)$			$-$	0	$+$		
E			$\searrow$	min	$\nearrow$		

Οπότε έχουμε ότι $minE(x) = E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$. Για $x = \frac{32}{\pi+4}$, η πλευρά του τετραγώνου ισούται με $\alpha = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου με $\delta = 2\rho = 2 \cdot \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{8}{\pi+4}$.

Γ3 Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 8)$. Έστω λοιπόν $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ και $\Delta_2 = \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

- E συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_1, άρα

$$E\left(\Delta_1\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

- E συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_2, άρα

$$E\left(\Delta_2\right) = \left(E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

Επομένως, ισχύουν τα εξής:

- $5 \in E\left(\Delta_1\right) \;\Rightarrow\;$ υπάρχει μοναδικό $\rho \in \Delta_1$ με $E(\rho)=5$
- $5 \notin E\left(\Delta_2\right) \;\Rightarrow\;$ η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

Συνοψίζοντας, η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση $\rho \in \Delta_1 \subseteq (0,8)$.

Θέμα Δ

Δ1 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε ότι

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\alpha$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<\alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	

- f κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$
- f κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A\left(\alpha, f(\alpha)\right)$.

Δ2

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ και $\Delta_2 = (\alpha, +\infty)$. Η f' είναι συνεχής στα Δ_1, Δ_2 και $f' \searrow \Delta_1$ και $f' \nearrow \Delta_2$. Οπότε έχουμε ότι

- $f'\left(\Delta_1\right) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right) = \left[2-2\alpha, +\infty\right)$
- $f'\left(\Delta_2\right) = \left(f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left(2-2\alpha, +\infty\right)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e^x\left(e^{-\alpha} - \dfrac{x}{e^x}\right)\right] = +\infty.$

Όμως, $\alpha > 1 \Rightarrow 2 - 2\alpha < 0$. Οπότε,

- $0 \in f'\left(\Delta_1\right) \;\Rightarrow\;$ υπάρχει μοναδικό $x_1 < \alpha$ με $f'(x_1) = 0$.
- $0 \in f'\left(\Delta_2\right) \;\Rightarrow\;$ υπάρχει μοναδικό $x_2 > \alpha$ με $f'(x_2) = 0$.

Από τη μονοτονία της f' προκύπτουν τα εξής:

- $x < x_1 < \alpha \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_1) \;\Rightarrow\; f'(x) > 0$
- $x_1 < x < \alpha \;\Rightarrow\; f'(x_1) > f'(x) \;\Rightarrow\; f'(x) < 0$
- $\alpha < x < x_2 \;\Rightarrow\; f'(x) < f'(x_2) \;\Rightarrow\; f'(x) < 0$
- $x > x_2 > \alpha \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_2) \;\Rightarrow\; f'(x) > 0$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$	τ.μ	$\searrow$			τ.ε	$\nearrow$	

- f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$
- f γνησίως φθίνουσα στα $[x_1, \alpha]$, $[\alpha, x_2]$ και f συνεχής στο α, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$.
- f γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$

Οπότε, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_1$ και τοπικό μέγιστο για $x = x_2$

Δ3 Ισχύει ότι $x_1 < 1$. Πράγματι, αν $x_1 \geq 1 \overset{f' \searrow (-\infty, \alpha]}{\Longrightarrow} f'(x_1) \leq f'(1) \Rightarrow 0 \leq 2e^{1-\alpha} - 2 \Rightarrow \alpha \leq 1$, άτοπο.

Επομένως, $x_1 < 1 < \alpha < x < x_2$ και $f \searrow [x_1, x_2] \Rightarrow f(1) > f(x)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4 Για $\alpha = 2$, έχουμε ότι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ και η εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

Επομένως, $f(x) \geq -2x + 2$, για κάθε $x \in [2, +\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$. Επίσης, $\sqrt{x-2} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-2} \cdot f(x) \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \\ \Rightarrow \quad & \int_2^3 \sqrt{x-2} \cdot f(x)\, dx > \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\, dx \quad (1) \end{aligned}$$

Για το $I = \displaystyle\int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\, dx$, θέτουμε $\sqrt{x-2} = u \Rightarrow x = u^2 + 2$, $dx = 2udu$. Οπότε,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (-2u^2+2) \cdot u \cdot 2u\, du \\ &= \int_0^1 \left(-4u^4 - 4u^2\right) du = \left[-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(1) \Leftrightarrow \int_2^3 \sqrt{x-2} \cdot f(x)\, dx > -\frac{32}{15}.$$