ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ12-4-21

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:ΔΕΚΑ (10)..

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 10

Θεωρία

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

Θεωρία

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $[\alpha, \beta)$, τότε η f παίρνει πάντα στο $[\alpha, \beta]$ μια ελάχιστη τιμή

Λ

β) Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

Λ

γ) αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο (α, β) τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

Λ

δ) Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f ΄, υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f.

Σ

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0,
τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0
και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$.

Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με
$f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f ΄ αντιστρέφεται.

Έστω ότι η f ΄ δεν είναι «1-1» τότε :
$\exists\, x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ και $f'(x_1) = f'(x_2)$

Από Θ.Rolle για την f ΄ στο $[x_1,x_2]$ έχουμε:

$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) = 0$ **Άτοπο** αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα f ΄ είναι «1-1» ισοδύναμα f ΄ αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

Από Θ.Rolle για την f στο [0,1] έχουμε:

$\exists\, x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0$ κι επειδή η f ΄ είναι «1-1» x_0 μοναδικό. Άρα υπάρχει μοναδική οριζόντια εφαπτομένη της C_f

Μονάδες 5

γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει παραπάνω από 2 ρίζες κι έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ 3 από αυτές.

Από Θ.Rolle για την f στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0$

Άτοπο αφού f ΄ «1-1». Άρα εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

Μονάδες 5

δ) Υπάρχει $\xi\in R$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$

Έστω $g(x)=e^{x^2-x}f(x)$

g συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

g παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\left(e^{x^2-x}f(x)\right)'=f'(x)e^{x^2-x}+(2x-1)e^{x^2-x}f(x)$$

$$g'(x)=e^{x^2-x}\left(f'(x)+(2x-1)f(x)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=e^{0^2-0}f(0)=f(0) \\ g(1)=e^{1^2-1}f(1)=f(1) \end{array}\right\} \overset{f(0)=f(1)}{\Rightarrow} g(0)=g(1)$$

Από Θ.Rolle :

$\exists\,\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi^2-\xi}\left(f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$

Μονάδες 5

ε) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

f συνεχής στο [0,1] από Θ.Μ.Ε.Τ. υπάρχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M ώστε να ισχύει: $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [0,1]$

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} m \le f\left(\frac{1}{3}\right) \le M \\ m \le f(0,2) \le M \\ m \le f\left(\frac{1}{e}\right) \le M \end{array}\right\} \Rightarrow 3m \le f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right) \le 3M \Rightarrow$$

$$m \le \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3} \le M$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:\ R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:
$f(x) \ne 0$, για κάθε $x \in R$ (1) και

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)f(x) + \eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1} = -2 \quad (2)$$

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = -5$.

Ονομάζω $g(x) = \dfrac{(x-2)f(x) + \eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}$, ορισμένη κοντά στο 2

και $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -2$, $f(x) = \dfrac{g(x)(\sqrt{x-1}-1) - \eta\mu(x^2-4)}{x-2}$

f συνεχής στο R ως παρ/μη στο R επομένως f συνεχής και στο 2 οπότε :

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)(\sqrt{x-1}-1)-\eta\mu(x^2-4)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}(x^2-4)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left[\dfrac{g(x)}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}(x+2)\right]}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{g(x)}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}(x+2)\right]=\frac{-2}{2}-1\cdot 4=-5$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}=1$ διότι :

Θέτω $u=x^2-4$ όταν $x\to 2$ τότε

$u\to \lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ τελικά :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=\frac{2016}{f(x_0)}.$$

Μονάδες 10(5+5)

$$\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=\frac{2016}{f(x_0)}\overset{x_0\neq 1,2}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x_0)(x_0-1)+f(x_0)(x_0-2)=2016(x_0-1)(x_0-2)\Leftrightarrow$$

$$f(x_0)(2x_0-3)-2016(x_0-1)(x_0-2)=0$$

Ονομάζω:

$$g(x)=f(x)(2x-3)-2016(x-1)(x-2)$$

Και

g συνεχής στο [1, 2]
g(1)=-f(1),   g(2)=f(2)
επομένως g(1)g(2)=-f(1)f(2)<0
Διότι :
f συνεχής στο R και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$
επομένως (από το θεώρημα σταθερού πρόσημου) η f(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο , f(2)=-5 άρα f(x)<0 τότε f(1)<0
επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow \frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=\frac{2016}{f(x_0)}$.

Γ2. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$, για κάθε $x\in R$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=-2$.

Η δοσμένη σχέση για x=1 δίνει
$f^2(1)+f(1)=2\Leftrightarrow f^2(1)+f(1)-2=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(1)-1)(f(1)+2)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(1)=1$ ή f(1)=-2
όμως
$f(x)<0$ για κάθε $x\in R$ επομένως τελικά
f(1)=-2

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της (1, f (1)).

Οι συναρτήσεις της ισότητας $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$, για κάθε $x\in R$ είναι παραγωγίσιμες ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων οπότε παραγωγίζοντας έχω
$2f(x)f'(x)+f'(x^2)2x=4x$
για x=1 έχω:
$-4f'(1)+2f'(1)=4\Leftrightarrow f'(1)=-2$
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,f(1)) είναι $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-2x$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε :
$(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1$

<u>*Σκέψη*</u>
Αρκεί να δείξω ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2)
η εξίσωση
$(x-3)f'(x)+f(x)=1 \Leftrightarrow (x-3)f'(x)+(x-3)'f(x)-1=0 \Leftrightarrow$

$[(x-3)f(x)-x]'=0$

<u>Λύση</u>
Αν g(x)=(x-3)f(x)-x
►g συνεχής στο [1, 2]
►g παρ/μη στο (1,2)
►g(1)=g(2)=3
από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1$

Μονάδες 15(5+5+5)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν : $f(\alpha-1)>\alpha-1$ (1) , $f(\alpha)<\alpha$ (2) και $f(\alpha+1)>\alpha+1$ (3) για κάποιο $\alpha \in R$.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου , έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία.

<u>Σκέψη</u>
Η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου έχει εξίσωση (ε) : y = x
Αρκεί να δείξω ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες η εξίσωση f(x)=x

<u>Λύση</u>

Αν g(x)=f(x)-x

g συνεχής στο $[\alpha-1,\ \alpha]$

$$\left.\begin{array}{r} g(\alpha-1)=f(\alpha-1)-(\alpha-1)>0 \\ g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha<0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(\alpha)g(\alpha-1)<0$$

από Θ. Bolzano υπάρχει $x_1 \in (\alpha-1,\alpha)$, τέτοιο ώστε:

$g(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)=x_1$ δηλαδή η Cf τέμνει την (ε) σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_1 \in (\alpha-1,\alpha)$,

όμοια η Cf τέμνει την (ε) σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_2 \in (\alpha,\alpha+1)$, και $x_1<\alpha<x_2$ οπότε η Cf τέμνει τη (ε) σε τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)-1=f(x)-x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α – 1 , α + 1).

Σκέψη

Η εξίσωση

$$f'(x)-1=f(x)-x \Leftrightarrow \left(f'(x)-1\right)e^{-x}-e^{-x}\left(f(x)-x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\left(f(x)-x\right)'+\left(e^{-x}\right)'\left(f(x)-x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x}\left(f(x)-x\right)\right)'=0$$

Αρκεί να εφαρμόσω Rolle σε κατάλληλο διάστημα για την

$h(x)=(f(x)-x)e^{-x}$

Το κατάλληλο διάστημα προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα μιας και

$h(x_1)=h(x_2)=0$

Λύση

Αν h(x)= $(f(x)-x)e^{-x}$

h συνεχής στο $[x_1, x_2]$ πράξεις και σύνθεση συνεχών

h παρ/μη στο (x_1, x_2) πράξεις και σύνθεση παρ/ων με

$h'(x)= f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)-e^{-x}+xe^{-x}$

$h(x_1)=h(x_2)=0$

από Θ. Rolle υπάρχει $\kappa \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε: $h'(\kappa)=0 \Leftrightarrow$

$$f'(\kappa)e^{-\kappa}-e^{-\kappa}f(\kappa)-e^{-\kappa}+\kappa e^{-\kappa}=0\Leftrightarrow$$
$$f'(\kappa)-f(\kappa)=1-\kappa$$

Τελικά η εξίσωση $f'(x)-1=f(x)-x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (x_1,x_2) άρα και στο $(\alpha-1\ ,\ \alpha+1)$.

γ) Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha-1,\alpha+1)$, ώστε $f''(\xi)>0$.

Μονάδες 15(5+5+5)

Λύση

f συνεχής στο [α-1,α]
f παρ/μη στο (α-1,α) από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\gamma\in(\alpha-1,\alpha)$:

$$f'(\gamma)=\frac{f(\alpha)-f(\alpha-1)}{\alpha-(\alpha-1)}<f(\alpha)-f(\alpha-1)<1 \text{ διότι: }$$

$$\left.\begin{matrix} f(\alpha)<\alpha \\ f(\alpha-1)>\alpha-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\alpha)<\alpha \\ -f(\alpha-1)<-\alpha+1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(\alpha)-f(\alpha-1)<1 \quad (4)$$

Επίσης:
f συνεχής στο[α , α+1]
f παρ/μη στο (α, α+1) , από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\delta\in(\alpha,\alpha+1)$:

$$f'(\delta)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha}{\alpha+1-\alpha}<f(\alpha+1)-f(\alpha)>1 \text{ διότι: }$$

$$\left.\begin{matrix} f(\alpha+1)>\alpha+1 \\ f(\alpha)<\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\alpha+1)>\alpha+1 \\ -f(\alpha)>-\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)>1 \quad (5)$$

f΄ συνεχής στο [γ , δ]
f΄ παρ/μη στο (γ , δ), από Θ.Μ.Τ. υπάρχει
$\xi\in(\gamma,\delta)\subseteq(\alpha-1,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε :

$$f''(\xi)=\frac{f'(\delta)-f'(\gamma)}{\delta-\gamma}>0 \quad \text{διότι: }$$

$$f'(\gamma)<1<f'(\delta)\Rightarrow f'(\delta)-f'(\gamma)>0 \text{ και } \gamma<\alpha<\delta\Rightarrow\delta-\gamma>0$$

Δ2. Έστω f :[0, 1]→ R μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f'(0) = f'(1) = 0$ (1) και $f(0) = 0$ (2)

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + x$

Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης Cg της συνάρτησης g, στα σημεία της με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3 = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $g(1) = 0$

Έστω (ε) η εφαπτομένη της Cg στο 0 τότε
(ε):$y-g(0)=g'(0)(x-0)$ ή (ε):$y=x$
Έστω (η) η εφαπτομένη της Cg στο 1 τότε
(η):$y-g(1)=g'(1)(x-1)$ ή (η): $y=-x+f(1)+1$
Οι (ε),(η) τέμνονται σε σημείο με τετμημένη την λύση της
εξίσωσης $x=-x+f(1)+1 \Leftrightarrow x=\frac{f(1)+1}{2}$
Άρα $\frac{f(1)+1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(1)=0 \Rightarrow g(1)=0$

β) Υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$ ώστε $g'(\xi)+2\xi=1$

Μονάδες 10(5+5)

Αρκεί να δείξω ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) η εξίσωση : $g'(x)+2x-1=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

► f συνεχής στο [0, 1]
► f παρ/μη στο (0, 1)
► f(1)=f(0)=0

από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$: $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)+2\xi=1$