<u>ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ</u>

Α΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ: 03 ΜΑΪΟΥ 2022

2$^{\text{Ο}}$ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

Θέμα Α

Α1. Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός, που όταν υψωθεί στη ν, δίνει τον α.

Α2. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| &\Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta| \text{ που ισχύει πάντα.} \end{aligned}$$

Α3. α) Λ , **β)** Σ , **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

Α4. α) $A_f = \{1, 3, 7, 8, 12\}$

β) $f(3) = -4, \quad f(7) = 0, \quad f(12) = 0$

γ) $f(A) = \{-14, -4, 0, 6\}$

Θέμα Β

Β1. Αφού η C_f διέρχεται από το $A(0, 1)$ έχουμε:

$1 = (\mu+1)\cdot 0 - (\mu+2)\cdot 0 + 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ που ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του μ.

Β2. Για να είναι η εξίσωση

$$(\mu+1)x^2-(\mu+2)x+1=0$$

$2^{ου}$ βαθμού θα πρέπει:

$$\mu+1\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq -1 \Leftrightarrow \mu\in\mathbb{R}-\{1\}$$

Β3. Για να έχει η συνάρτηση μοναδική απλή ρίζα θα πρέπει να είναι $1^{ου}$ βαθμού. Δηλαδή, να ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \mu+1=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ -(\mu+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mu+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mu\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \mu=-1$$

Β4. Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες αντίστροφες, είναι $2^{ου}$ βαθμού και εκμεταλλευόμενοι τους τύπους του Vieta θα ισχύει ότι:

$$P=1 \overset{\mu+1\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\mu+1}=1 \Leftrightarrow 1=\mu+1 \Leftrightarrow \mu=0$$

Για $\mu=0$ η αρχική συνάρτηση γίνεται:

$$f(x)=(0+1)x^2-(0+2)x+1 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2x+1 \Leftrightarrow f(x)=(x-1)^2$$

Θέμα Γ

Γ1. Το σημείο Μ θα ανήκει στον Oy αν ισχύουν τα εξής:

$$|x-1|-2=0 \text{ και } x^2-5x+4>0$$

- $|x-1|-2=0 \Leftrightarrow |x-1|=2 \Leftrightarrow x-1=2 \text{ ή } x-1=-2$
  $\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-1$

- $x^2-5x+4>0$

  θέτουμε $x^2-5x+4=0$

  $\Delta=9>0$

  $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_1=4,\ x_2=1$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

Επομένως: $x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$

Άρα η μοναδική λύση που επαληθεύει και τις δύο απαιτήσεις είναι η $x = -1$.

Γ2. Για $x = -1$ το σημείο Μ γράφεται:

$$M(|-1-1|-2\,,1+5+4) = M(0{,}10)$$

και συνεπώς η παράλληλη στον x'x που διέρχεται από το σημείο Μ είναι η ευθεία

$$\varepsilon{:}\ y = 10$$

Έτσι τα σημεία τομής της ε με την γραφική παράσταση της f δίνονται από την λύση της εξίσωσης :

$f(x) = 10 \Leftrightarrow -2x^2+(\lambda-5)x+\lambda^2+15 = 10$

$\Leftrightarrow -2x^2+(\lambda-5)x+\lambda^2+5 = 0. \qquad (1)$

Άρα θα τέμνονται πάντα σε δυο σημεία αν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)^2+8(\lambda^2+5) > 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ3. Αφού x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ε, θα ικανοποιούν την εξίσωση (1) που προέκυψε στο Γ2 . Δηλαδή τα x_1, x_2 θα αποτελούν ρίζες της εξίσωσης (1).

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $-2x^2+(\lambda-5)x+\lambda^2+5=0$ έχει γινόμενο ριζών:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2+5}{-2} < 0$$

Δηλαδή, x_1, x_2 ετερόσημοι.

Επιπλέον αφού $x_1 < x_2$ θα ισχύει ότι $x_1 < 0 < x_2$.

Άρα το $A(x_1, 10)$ θα βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο και το $B(x_2, 10)$ θα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Γ4. Για να είναι η C_f πάντα πάνω από τη C_g, θα πρέπει να ισχύει για κάθε

πραγματικό αριθμό x:

$$-2x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda^2 + 15 > -3x^2 - 5x + 18 \Leftrightarrow x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 3 > 0$$

Για να είναι λοιπόν η παραπάνω ανίσωση πάντα θετική, αρκεί

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4(\lambda^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 < -12 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow |\lambda|^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2 \Leftrightarrow \lambda \in (-2,2)$$

Συνεπώς, για $\lambda = 0 \in (-2,2)$ η C_f είναι πάντα πάνω από τη C_g.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο Κώστας αφού προσθέτει στο διάβασμα του κάθε εβδομάδα 2 ώρες, θα ακολουθήσει αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$, δηλαδή ο γενικός όρος την προόδου θα είναι

$$\alpha_\nu = 12 + (\nu - 1) \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 12 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 10$$

Η Μαρία αφού αυξάνει το διάβασμά της κάθε εβδομάδα κατά 10%, θα ακολουθήσει γεωμετρική πρόοδο με $\beta_1 = 12$ και $\lambda = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$, δηλαδή ο γενικός όρος την προόδου θα είναι

$$\beta_\nu = 12 \cdot (1{,}1)^{\nu - 1}$$

Δ2. Ο Κώστας θα έχει διαβάσει:

- Την 5η εβδομάδα : $\alpha_5 = 2 \cdot 5 + 10 = 20\ h$
- Την 10η εβδομάδα : $\alpha_{10} = 2 \cdot 10 + 10 = 30\ h$

Η Μαρία θα έχει διαβάσει:

- Την 5η εβδομάδα : $\beta_5 = 12 \cdot 1{,}1^4 = 17{,}6^*\ h$
- Την 10η εβδομάδα : $\beta_{10} = 12 \cdot 1{,}1^9 = 28{,}3^*\ h$

Δ3. Στο τέλος της 15ης εβδομάδας:

- Ο Κώστας θα έχει διαβάσει συνολικά: $S_{15} = \frac{15}{2}(2 \cdot 12 + 28) = 390\ h$

- Η Μαρία θα έχει διαβάσει συνολικά: $S_{15} = \frac{12\left(1-1{,}1^{15}\right)}{1-1{,}1} = 381{,}3^{*}\ h$.

Δ4. Όταν η Μαρία ξεπεράσει τις 40 ώρες διάβασμα θα ισχύει:

$$\beta_\nu > 40 \Leftrightarrow 12 \cdot 1{,}1^{\nu-1} > 40 \Leftrightarrow 1{,}1^{\nu-1} > \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1{,}1^{\nu-1} > 3{,}33^{*} \Leftrightarrow \nu - 1 = 12$$

$$\Leftrightarrow \nu = 13\,.$$

**Οι αριθμοί δίνονται με προσέγγιση.*