ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ
Β΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ: 29 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022
1^{Ο} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΧΤΩ (8)
ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α

Α1. Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_\alpha x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0,+\infty)$ στο $\log_\alpha x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : (0,+\infty) \to R \quad με \quad f(x) = \log_\alpha x$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Απόδειξη

Αν ο ρ ≠ 0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\rho + a_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \cdots - \alpha_1\rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1)$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο αριθμός $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Α3. Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0,$$

που σημαίνει ότι το $\underline{\rho}$ <u>είναι ρίζα</u> του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$. Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

παίρνουμε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $\underline{x - \rho}$ <u>είναι παράγοντας</u> του $P(x)$.

Α4. α) Λ , **β)** Σ , **γ)** Λ , **δ)** Λ, **ε)** Λ.

Θέμα Β

Β1. Αφού η σφαίρα μετά από 2 s θα έχει διενεργήσει μίση ταλάντωση, τότε για να έχει διενεργήσει μία πλήρη ταλάντωση θα χρειαστεί 4 s. Άρα $T = 4\ s$.
Για την τιμή του ω έχουμε:

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} \Leftrightarrow 4 = \frac{2\pi}{2\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

Β2. Το ελάχιστο ύψος της σφαίρας από το πάτωμα είναι 50 – 20 = 30 cm.
Η κίνηση της σφαίρας ακολουθεί τη συνημιτονοειδή συνάρτηση και παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, η συνάρτηση $h(t)$ παίρνει την μέγιστη τιμή της. Άρα για την τιμή του α ισχύει ότι $\alpha > 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} -1 \le \sigma\upsilon\nu(2\omega t) \le 1 &\overset{\cdot a}{\Leftrightarrow} -a \le a \cdot \sigma\upsilon\nu(2\omega t) \le a \\ &\Leftrightarrow -a + \beta \le a \cdot \sigma\upsilon\nu(2\omega t) + \beta \le a + \beta \\ &\Leftrightarrow -a + \beta \le h(t) \le a + \beta \end{aligned}$$

Άρα ισχύει ότι $\begin{cases} -\alpha + \beta = 30 \\ \alpha + \beta = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 10 \\ \beta = 40 \end{cases}$

Β3. Σύμφωνα με το ερώτημα Β2 έχουμε ότι:

$$h(t) = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\omega t) + 40$$

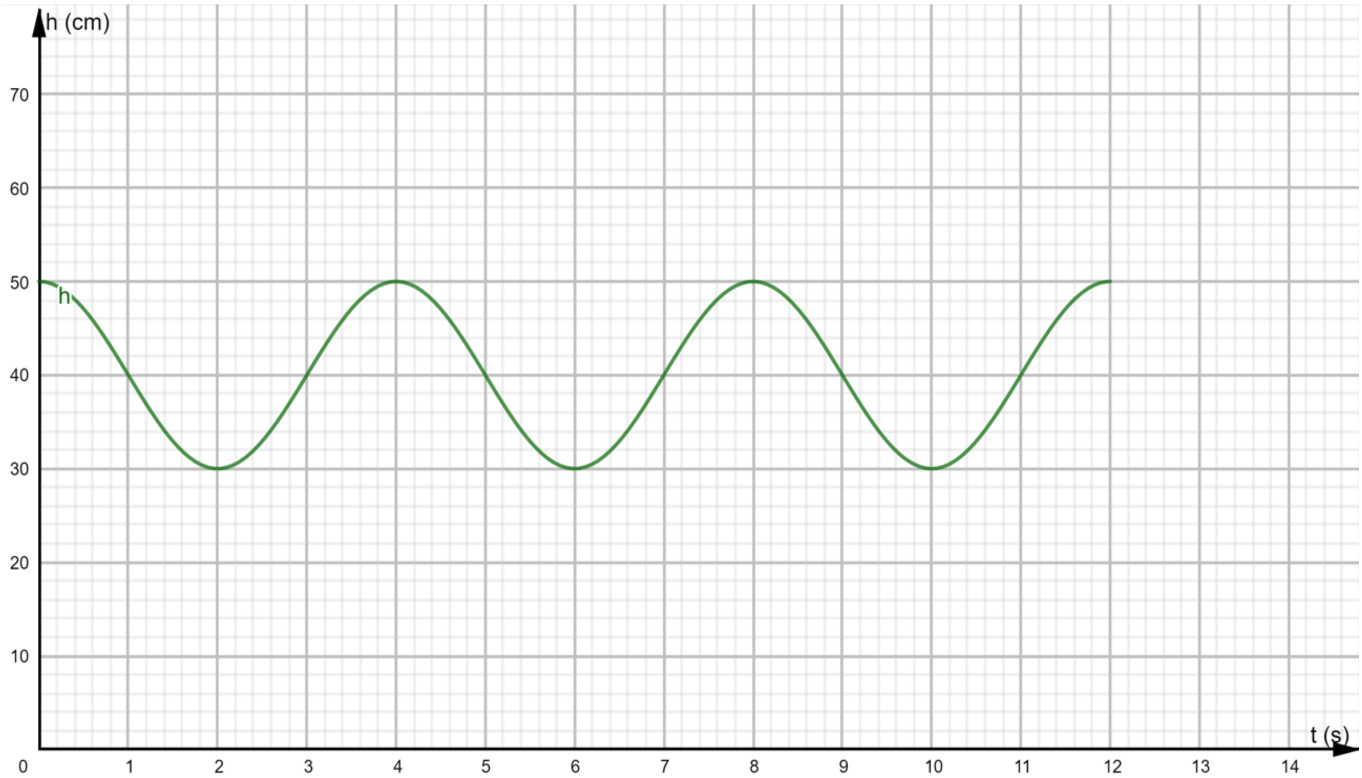
Αφού θέλουμε το ύψος της σφαίρας μετά από 1,5 λεπτό αλλά η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι second θα πρέπει να κάνουμε την εξής μετατροπή:

$$1{,}5\ min = \frac{3}{2} min = \frac{3}{2} \cdot 60\ sec = 90 sec$$

Άρα $h(90) = 10 \cdot συν\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 90\right) + 40 = 10 \cdot συν(45\pi) + 40$

$$= 10 \cdot συν\pi + 40 = -10 + 40 = 30\ cm$$

Β4. Η γραφική παράσταση της h(t) στο διάστημα [0, 12] έχει την παρακάτω μορφή:



Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε :

$$P(1) = 18 \Leftrightarrow 10^{a+1} - 2 + 23 - 5^{a+2} + 10^{a+1} - 1 + 5^{a+1} + 6 - 8 = 18$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot 10^{a} - 25 \cdot 5^{a} + 10 \cdot 10^{a} + 5 \cdot 5^{a} + 18 = 18$$

$$\Leftrightarrow 20 \cdot 10^{a} - 20 \cdot 5^{a} = 18 - 18$$

$$\Leftrightarrow 20 \cdot 10^a - 20 \cdot 5^a = 0$$

$$\Leftrightarrow 20 \cdot 10^a = 20 \cdot 5^a$$

$$\Leftrightarrow 10^a = 5^a$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^a}{5^a} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

Γ2. Έχουμε ότι $P(x) = 8x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 11x - 8$

Για το Q(x) έχουμε $Q(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ είναι παράγοντας του P(x) και επειδή είναι στη μορφή $x - \rho$ εφαρμόζουμε σχήμα Horner για $\rho = \frac{1}{2}$.

8	-2	9	11	-8	$\frac{1}{2}$
	4	1	5	8	
8	2	10	16	0	

Άρα το $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ είναι παράγοντας του P(x) και προκύπτει ότι :

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^3 + 2x^2 + 10x + 16) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (4x^3 + x^2 + 5x + 8)$$

$$= (2x - 1)(4x^3 + x^2 + 5x + 8) = Q(x)(4x^3 + x^2 + 5x + 8)$$

Γ3. Έχουμε ότι

$$17\sigma\varphi^2 x - 8(\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) + \frac{6\sigma\upsilon\nu^4 x - 5}{\eta\mu^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 17\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} - 8\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 8\sigma\upsilon\nu^4 x + \frac{6\sigma\upsilon\nu^4 x - 5}{\eta\mu^2 x} = 0 \qquad (2)$$

θα πρέπει $\begin{cases} \eta\mu^2 x \neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sigma\upsilon\nu^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Γ4. Στην εξίσωση (2) που βρήκαμε στο Γ3 θέτουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x = \omega$ και γίνεται:

$$17\frac{\omega}{1-\omega} - 8\frac{1-\omega}{\omega} - 8\omega^2 + \frac{6\omega^2-5}{1-\omega} = 0$$

$\Leftrightarrow 17\omega^2 - 8(1-\omega)^2 - 8\omega^3(1-\omega) + 6\omega^3 - 5\omega = 0$

$\Leftrightarrow 17\omega^2 - 8(1-2\omega+\omega^2) - 8\omega^3 + 8\omega^4 + 6\omega^3 - 5\omega = 0$

$\Leftrightarrow 17\omega^2 - 8 + 16\omega - 8\omega^2 - 8\omega^3 + 8\omega^4 + 6\omega^3 - 5\omega = 0$

$\Leftrightarrow 8\omega^4 - 2\omega^3 + 9\omega^2 + 11\omega - 8 = 0$

$\overset{\Gamma 2}{\Leftrightarrow} P(\omega) = 0$

Σύμφωνα λοιπόν με το ερώτημα Γ2 προκύπτει ότι :

$P(\omega) = 0 \Leftrightarrow \left(\omega - \frac{1}{2}\right)(8\omega^3 + 2\omega^2 + 10\omega + 16) = 0 \quad (3)$

Εφαρμόζοντας Horner στο πολυώνυμο $8\omega^3 + 2\omega^2 + 10\omega + 16$ για $\rho = -1$ έχουμε:

8	2	10	16	-1
	-8	6	-16	
8	-6	16	0	

Δηλαδή, προκύπτει ότι $8\omega^3 + 2\omega^2 + 10\omega + 16 = (\omega+1)(8\omega^2 - 6\omega + 16) \quad (4)$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$\left(\omega - \frac{1}{2}\right)(\omega+1)(8\omega^2 - 6\omega + 16) = 0$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$ ή $\omega = -1$ ή $8\omega^2 - 6\omega + 16 = 0$ $(\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\ \sigma\tau o\ \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$ ή $\omega = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 x = -1$ $(\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta)$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρχικά για να ορίζεται η συνάρτηση έχουμε ότι:

$$x - \frac{1}{a^2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow A_f = \left(\frac{1}{a^2}, +\infty\right)$$

Ακόμη, η C_f διέρχεται από το σημείο Α (2α , 0), οι συντεταγμένες του οποίου θα την επαληθεύουν. Δηλαδή,

$$\log\left(2\alpha - \frac{1}{a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \log\left(2\alpha - \frac{1}{a^2}\right) = \log 1$$

$$\Leftrightarrow 2a - \frac{1}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 2a^3 - a^2 - 1 = 0$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner στο πολυώνυμο $2a^3 - a^2 - 1$ για $\rho = 1$ έχουμε:

2	-1	0	-1	1
	2	1	1	
2	1	1	0	

Άρα $2a^3 - a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(2\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; 2\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \; (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \; \sigma\tau o \; \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2. Έχουμε $g(x) = f(\log(x-1))$ $\quad$ (1)

Αρχικά θα πρέπει $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ $\quad$ (2)

Η $(1) \Leftrightarrow g(x) = \log(\log(x-1) - 1)$

Άρα θα πρέπει επιπλέον:

$$\log(x-1) - 1 > 0 \Leftrightarrow \log(x-1) > 1$$
$$\Leftrightarrow \log(x-1) > \log 10$$
$$\Leftrightarrow x - 1 > 10$$
$$\Leftrightarrow x > 11 \qquad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει ότι $x > 11$.

Άρα $A_g = (11, +\infty)$

Δ3. Ισχύει ότι $f(x) = \log(x-1)$. Άρα $A_f = (1, +\infty)$.

Θα έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \log(x_1 - 1) < \log(x_2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Δ4. Έχουμε

$$16^{f(x)} \cdot e - (4e)^{f(x)} = 12 \cdot e^{2f(x)-1} \Leftrightarrow 4^{2f(x)} \cdot e - 4^{f(x)} \cdot e^{f(x)} = \frac{12}{e} \cdot e^{2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2f(x)} \cdot e}{e^{2f(x)}} - \frac{4^{f(x)} \cdot \cancel{e^{f(x)}}}{e^{\cancel{2}f(x)}} = \frac{\frac{12}{e} \cdot \cancel{e^{2f(x)}}}{\cancel{e^{2f(x)}}} \Leftrightarrow e\left(\frac{4}{e}\right)^{2f(x)} - \left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} = \frac{12}{e}$$

$$\Leftrightarrow e\left(\frac{4}{e}\right)^{2f(x)} - \left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} - \frac{12}{e} = 0$$

θέτουμε $\left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} = \omega$ και έχουμε

$$e \cdot \omega^2 - \omega - \frac{12}{e} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{4}{e} \quad ή \quad \omega = -\frac{3}{e}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} = \frac{4}{e} \quad ή \quad \left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} = -\frac{3}{e} \ (αδύνατη)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{e}\right)^{f(x)} = \frac{4}{e} \Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log(x-1) = \log 10$$

$\Leftrightarrow x = 11$ που είναι δεκτή.

Δ5. Ισχύει ότι

$$\kappa = f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{199}{99}\right)$$

$$= \log(3-1) + \log\left(\frac{5}{2} - 1\right) + \log\left(\frac{7}{3} - 1\right) + \cdots + \log\left(\frac{199}{99} - 1\right)$$

$$= \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \cdots + \log\frac{100}{99}$$

$$= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \cdots + \log 100 - \log 99$$

$$= \log 100$$

$$= 2 \ \in \mathbb{Z}$$